Théorie des jeux

Frédéric Koessler

frederic[point]koessler[at]gmail[point]com

http ://frederic.koessler.free.fr/cours.htm

Théorie des jeux

Frédéric Koessler

frederic[point]koessler[at]gmail[point]com

http ://frederic.koessler.free.fr/cours.htm

Plan général du cours

(22 juillet 2008)

– Introduction et théorie de la décision individuelle

Théorie des jeux

Frédéric Koessler

frederic[point]koessler[at]gmail[point]com

http ://frederic.koessler.free.fr/cours.htm

Plan général du cours

(22 juillet 2008)

– Introduction et théorie de la décision individuelle
– Jeux sous forme normale

Théorie des jeux

Frédéric Koessler

frederic[point]koessler[at]gmail[point]com

http ://frederic.koessler.free.fr/cours.htm

Plan général du cours

(22 juillet 2008)

– Introduction et théorie de la décision individuelle

– Jeux sous forme normale

– Information incomplète et jeux Bayésiens

Théorie des jeux

Frédéric Koessler

frederic[point]koessler[at]gmail[point]com

http ://frederic.koessler.free.fr/cours.htm

Plan général du cours

(22 juillet 2008)

– Introduction et théorie de la décision individuelle
– Jeux sous forme normale
– Information incomplète et jeux Bayésiens
– Théorie des jeux comportementale (économie expérimentale)

Théorie des jeux

Frédéric Koessler

frederic[point]koessler[at]gmail[point]com

http ://frederic.koessler.free.fr/cours.htm

Plan général du cours

(22 juillet 2008)

– Introduction et théorie de la décision individuelle
– Jeux sous forme normale
– Information incomplète et jeux Bayésiens
– Théorie des jeux comportementale (économie expérimentale)
– Jeux sous forme extensive

Théorie des jeux

Frédéric Koessler

frederic[point]koessler[at]gmail[point]com

http ://frederic.koessler.free.fr/cours.htm

Plan général du cours

(22 juillet 2008)

- Introduction et théorie de la décision individuelle
- Jeux sous forme normale
- Information incomplète et jeux Bayésiens
- Théorie des jeux comportementale (économie expérimentale)
- Jeux sous forme extensive
- Jeux répétés

Manuels

Manuels

- Demange et Ponssard (1994) : "*Théorie des jeux et analyse économique*"
- Mas-Colell et al. (1995) : "*Microeconomic Theory*", chap. 6–9
- Myerson (1991) : "*Game Theory : Analysis of Conflict*"
- Osborne et Rubinstein (1994) : "*A Course in Game Theory*"

Manuels

- Demange et Ponssard (1994) : "*Théorie des jeux et analyse économique*"
- Mas-Colell et al. (1995) : "*Microeconomic Theory*", chap. 6–9
- Myerson (1991) : "*Game Theory : Analysis of Conflict*"
- Osborne et Rubinstein (1994) : "*A Course in Game Theory*"

Pour des introductions plus élémentaires :

Manuels

- Demange et Ponssard (1994) : “*Théorie des jeux et analyse économique*”
- Mas-Colell et al. (1995) : “*Microeconomic Theory*”, chap. 6–9
- Myerson (1991) : “*Game Theory : Analysis of Conflict*”
- Osborne et Rubinstein (1994) : “*A Course in Game Theory*”

Pour des introductions plus élémentaires :

- Gibbons (1992) : “*Game Theory for Applied Economists*”
- Kreps (1999) : “*Théorie des jeux et modélisation économique*”
- Osborne (2004) : “*An Introduction to Game Theory*”
- Umbhauer (2002, 2004) : “*Théorie des jeux*” et “*Théorie des jeux appliquée à la gestion*”
- Yildizoglu (2003) : “*Introduction à la théorie des jeux*”
- Cavagnac (2006) : “*Théorie des jeux*”

Pour la théorie des jeux comportementale (expérimentale) :

Pour la théorie des jeux comportementale (expérimentale) :

– Camerer (2003) : "*Behavioral Game Theory : Experiments on Strategic Interaction*"

Pour la théorie des jeux comportementale (expérimentale) :

– Camerer (2003) : "*Behavioral Game Theory : Experiments on Strategic Interaction*"

Approches informelles et études de cas :

Pour la théorie des jeux comportementale (expérimentale) :

– Camerer (2003) : "*Behavioral Game Theory : Experiments on Strategic Interaction*"

Approches informelles et études de cas :

– Dixit et Nalebuff (1991) : "*Thinking Strategically*"
– Nalebuff et Brandenburger (1996) : "*Co-opetition*"

Pour la théorie des jeux comportementale (expérimentale) :

– Camerer (2003) : “*Behavioral Game Theory : Experiments on Strategic Interaction*”

Approches informelles et études de cas :

– Dixit et Nalebuff (1991) : “*Thinking Strategically*”
– Nalebuff et Brandenburger (1996) : “*Co-opetition*”

Livres de vulgarisation et/ou historiques :

Pour la théorie des jeux comportementale (expérimentale) :

– Camerer (2003) : "*Behavioral Game Theory : Experiments on Strategic Interaction*"

Approches informelles et études de cas :

– Dixit et Nalebuff (1991) : "*Thinking Strategically*"
– Nalebuff et Brandenburger (1996) : "*Co-opetition*"

Livres de vulgarisation et/ou historiques :

– Mérö (2000) : "*Les aléas de la raison*"
– Nasar (2001) : "*A Beautiful Mind : The Life of Mathematical Genius and Nobel Laureate John Nash*"
– Poundstone (2003) : "*Le dilemme du prisonnier : Von Neumann, la théorie des jeux et la bombe*"

Théorie des jeux = théorie de la décision (rationnelle) d'agents stratégiquement interdépendants, c'est-à-dire qui s'influencent les uns les autres et qui ont conscience de ces influences réciproques

Théorie des jeux $=$ théorie de la décision (rationnelle) d'agents stratégiquement interdépendants, c'est-à-dire qui s'influencent les uns les autres et qui ont conscience de ces influences réciproques

☞ Théorie de la décision interactive

Théorie des jeux = théorie de la décision (rationnelle) d'agents stratégiquement interdépendants, c'est-à-dire qui s'influencent les uns les autres et qui ont conscience de ces influences réciproques

☞ Théorie de la décision interactive

☞ Analyse des conflits

Théorie des jeux = théorie de la décision (rationnelle) d'agents stratégiquement interdépendants, c'est-à-dire qui s'influencent les uns les autres et qui ont conscience de ces influences réciproques

☞ Théorie de la décision interactive

☞ Analyse des conflits

☞ Science de la stratégie

Théorie des jeux = théorie de la décision (rationnelle) d'agents stratégiquement interdépendants, c'est-à-dire qui s'influencent les uns les autres et qui ont conscience de ces influences réciproques

- ☞ Théorie de la décision interactive
- ☞ Analyse des conflits
- ☞ Science de la stratégie

Jeux = situations de décisions interactives dans lesquelles l'utilité (bien-être) de chaque individu dépend des décisions des autres individus

Théorie des jeux = théorie de la décision (rationnelle) d'agents stratégiquement interdépendants, c'est-à-dire qui s'influencent les uns les autres et qui ont conscience de ces influences réciproques

- ☞ Théorie de la décision interactive
- ☞ Analyse des conflits
- ☞ Science de la stratégie

Jeux = situations de décisions interactives dans lesquelles l'utilité (bien-être) de chaque individu dépend des décisions des autres individus

- ☞ Problèmes économiques, sociaux, politiques, diplomatiques et militaires

Théorie des jeux = théorie de la décision (rationnelle) d'agents stratégiquement interdépendants, c'est-à-dire qui s'influencent les uns les autres et qui ont conscience de ces influences réciproques

- ☞ Théorie de la décision interactive
- ☞ Analyse des conflits
- ☞ Science de la stratégie

Jeux = situations de décisions interactives dans lesquelles l'utilité (bien-être) de chaque individu dépend des décisions des autres individus

- ☞ Problèmes économiques, sociaux, politiques, diplomatiques et militaires
- ☞ Ordre naturel (interaction entre les espèces/gènes)

Exemples.

Exemples.

– Concurrence imparfaite : les prix ne sont pas donnés mais sont les conséquences des décisions des agents

Exemples.

- Concurrence imparfaite : les prix ne sont pas donnés mais sont les conséquences des décisions des agents
- Enchère : l'issue (i.e., le gagnant et le prix qu'il a payé) dépend des actions de tous les enchérisseurs et du type d'enchère utilisée par l'organisateur

Exemples.

- Concurrence imparfaite : les prix ne sont pas donnés mais sont les conséquences des décisions des agents
- Enchère : l'issue (i.e., le gagnant et le prix qu'il a payé) dépend des actions de tous les enchérisseurs et du type d'enchère utilisée par l'organisateur
- Compétition électorale

Exemples.

– Concurrence imparfaite : les prix ne sont pas donnés mais sont les conséquences des décisions des agents
– Enchère : l'issue (i.e., le gagnant et le prix qu'il a payé) dépend des actions de tous les enchérisseurs et du type d'enchère utilisée par l'organisateur
– Compétition électorale
– Décisions de membres d'un jury sur un verdict

Exemples.

– Concurrence imparfaite : les prix ne sont pas donnés mais sont les conséquences des décisions des agents
– Enchère : l'issue (i.e., le gagnant et le prix qu'il a payé) dépend des actions de tous les enchérisseurs et du type d'enchère utilisée par l'organisateur
– Compétition électorale
– Décisions de membres d'un jury sur un verdict
– Macroéconomie ouverte : coordination internationale des politiques économiques

Exemples.

- Concurrence imparfaite : les prix ne sont pas donnés mais sont les conséquences des décisions des agents
- Enchère : l'issue (i.e., le gagnant et le prix qu'il a payé) dépend des actions de tous les enchérisseurs et du type d'enchère utilisée par l'organisateur
- Compétition électorale
- Décisions de membres d'un jury sur un verdict
- Macroéconomie ouverte : coordination internationale des politiques économiques
- Animaux chassant une proie

Exemples.

- Concurrence imparfaite : les prix ne sont pas donnés mais sont les conséquences des décisions des agents
- Enchère : l'issue (i.e., le gagnant et le prix qu'il a payé) dépend des actions de tous les enchérisseurs et du type d'enchère utilisée par l'organisateur
- Compétition électorale
- Décisions de membres d'un jury sur un verdict
- Macroéconomie ouverte : coordination internationale des politiques économiques
- Animaux chassant une proie

➥ Pas nécessairement de conflits purs ; jeux à somme non nulle vs. jeux à somme nulle ... image (issue "perdante-perdante") ...

3 grands thèmes en théorie des jeux

3 grands thèmes en théorie des jeux

(1) La théorie des jeux non-coopératifs ou stratégiques

3 grands thèmes en théorie des jeux

(1) La théorie des jeux non-coopératifs ou stratégiques

– Jeux sous forme normale (stratégique) / sous forme extensive (développée)

3 grands thèmes en théorie des jeux

(1) La théorie des jeux non-coopératifs ou stratégiques
- Jeux sous forme normale (stratégique) / sous forme extensive (développée)
- Jeux à information parfaite / information imparfaite

3 grands thèmes en théorie des jeux

(1) La théorie des jeux non-coopératifs ou stratégiques

- Jeux sous forme normale (stratégique) / sous forme extensive (développée)
- Jeux à information parfaite / information imparfaite

(2) La théorie des jeux coopératifs ou coalitionnels

3 grands thèmes en théorie des jeux

(1) La théorie des jeux non-coopératifs ou stratégiques
- Jeux sous forme normale (stratégique) / sous forme extensive (développée)
- Jeux à information parfaite / information imparfaite

(2) La théorie des jeux coopératifs ou coalitionnels

(3) Le choix social, la théorie de l'implémentation et des mécanismes

3 grands thèmes en théorie des jeux

(1) La théorie des jeux non-coopératifs ou stratégiques
- Jeux sous forme normale (stratégique) / sous forme extensive (développée)
- Jeux à information parfaite / information imparfaite

(2) La théorie des jeux coopératifs ou coalitionnels

(3) Le choix social, la théorie de l'implémentation et des mécanismes

(1) ➨ joueurs indépendants, stratégies, préférences / description détaillée + notion d'équilibre

3 grands thèmes en théorie des jeux

(1) La théorie des jeux non-coopératifs ou stratégiques
- Jeux sous forme normale (stratégique) / sous forme extensive (développée)
- Jeux à information parfaite / information imparfaite

(2) La théorie des jeux coopératifs ou coalitionnels

(3) Le choix social, la théorie de l'implémentation et des mécanismes

(1) ➨ joueurs indépendants, stratégies, préférences / description détaillée + notion d'équilibre

(2) ➨ coalitions, valeurs des coalitions, contrats contraignants / approche axiomatique

3 grands thèmes en théorie des jeux

(1) La théorie des jeux non-coopératifs ou stratégiques

- Jeux sous forme normale (stratégique) / sous forme extensive (développée)
- Jeux à information parfaite / information imparfaite

(2) La théorie des jeux coopératifs ou coalitionnels

(3) Le choix social, la théorie de l'implémentation et des mécanismes

(1) ➨ joueurs indépendants, stratégies, préférences / description détaillée + notion d'équilibre

(2) ➨ coalitions, valeurs des coalitions, contrats contraignants / approche axiomatique

(3) ➨ on modifie les paramètres du jeu (règles, transferts, . . .) afin d'obtenir des solutions qui vérifient des propriétés globales souhaitées (la Pareto-optimalité, certains critères de justice, la protection de l'environnement, . . .)

Premier exemple : Bus ou voiture ?

Premier exemple : Bus ou voiture ?

$N = [0, 1] =$ population d'une ville (**les joueurs**)

Premier exemple : Bus ou voiture ?

$N = [0, 1] =$ population d'une ville (**les joueurs**)

Choix de chaque joueur : "prendre la voiture" ou "prendre le bus" (**les actions**)

Premier exemple : Bus ou voiture ?

$N = [0,1] =$ population d'une ville (**les joueurs**)

Choix de chaque joueur : "prendre la voiture" ou "prendre le bus" (**les actions**)

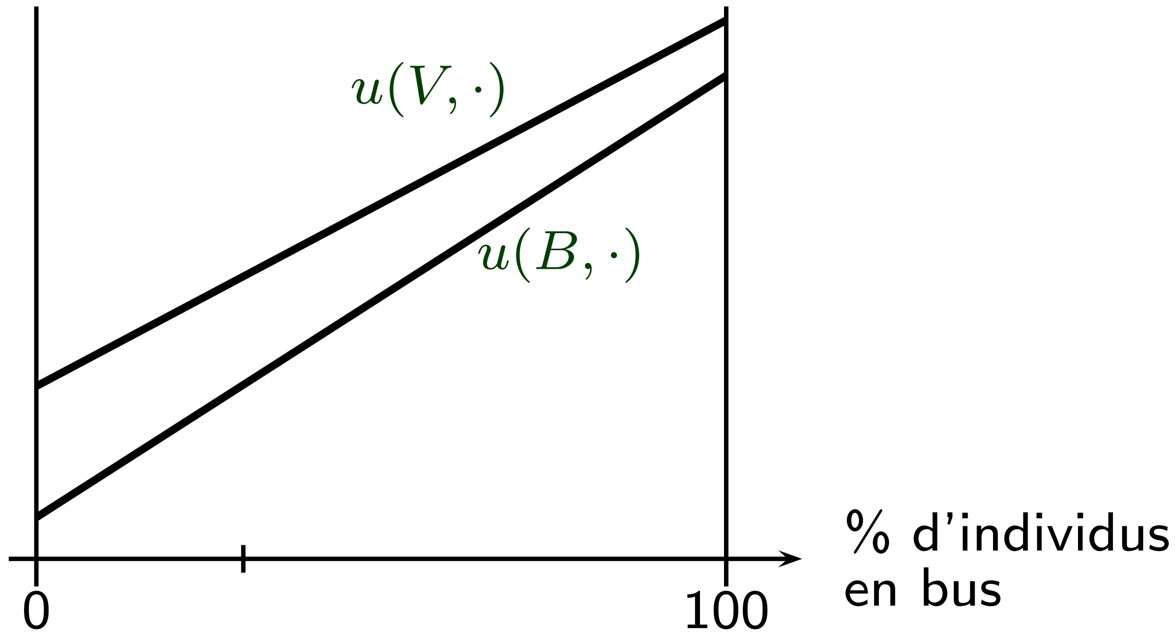
x % prennent le bus $\Rightarrow$ utilités $u(B,x)$, $u(V,x)$ (**les préférences**)

Premier exemple : Bus ou voiture ?

$N = [0, 1] =$ population d'une ville (**les joueurs**)

Choix de chaque joueur : "prendre la voiture" ou "prendre le bus" (**les actions**)

x % prennent le bus $\Rightarrow$ utilités $u(B, x)$, $u(V, x)$ (**les préférences**)

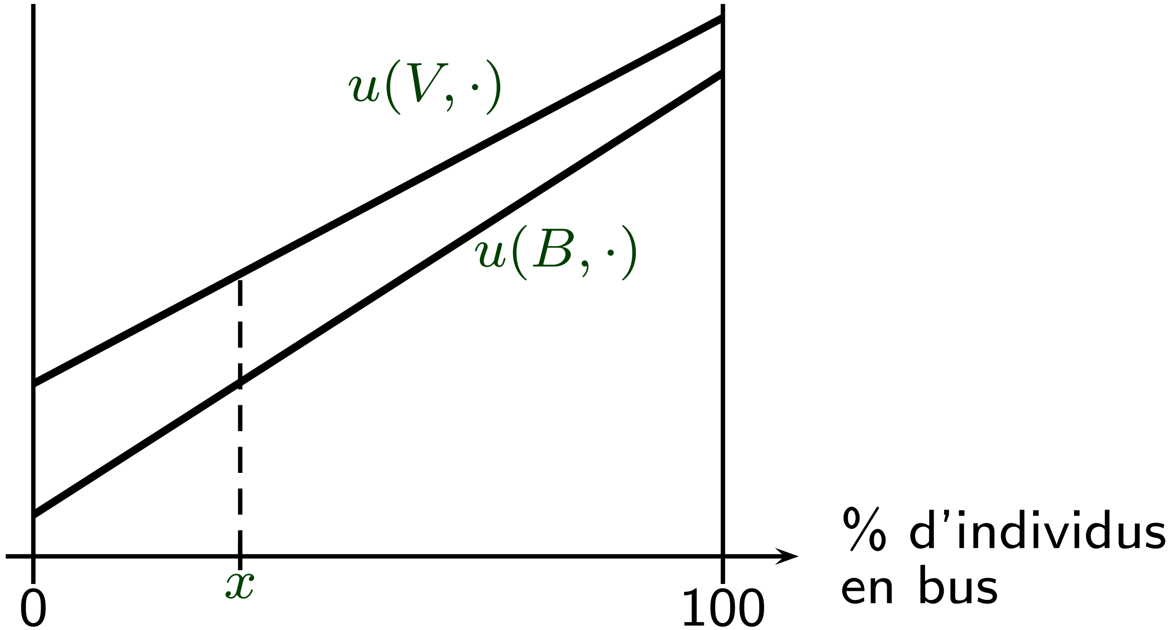


Premier exemple : Bus ou voiture ?

$N = [0, 1] =$ population d'une ville (**les joueurs**)

Choix de chaque joueur : "prendre la voiture" ou "prendre le bus" (**les actions**)

x % prennent le bus $\Rightarrow$ utilités $u(B, x)$, $u(V, x)$ (**les préférences**)



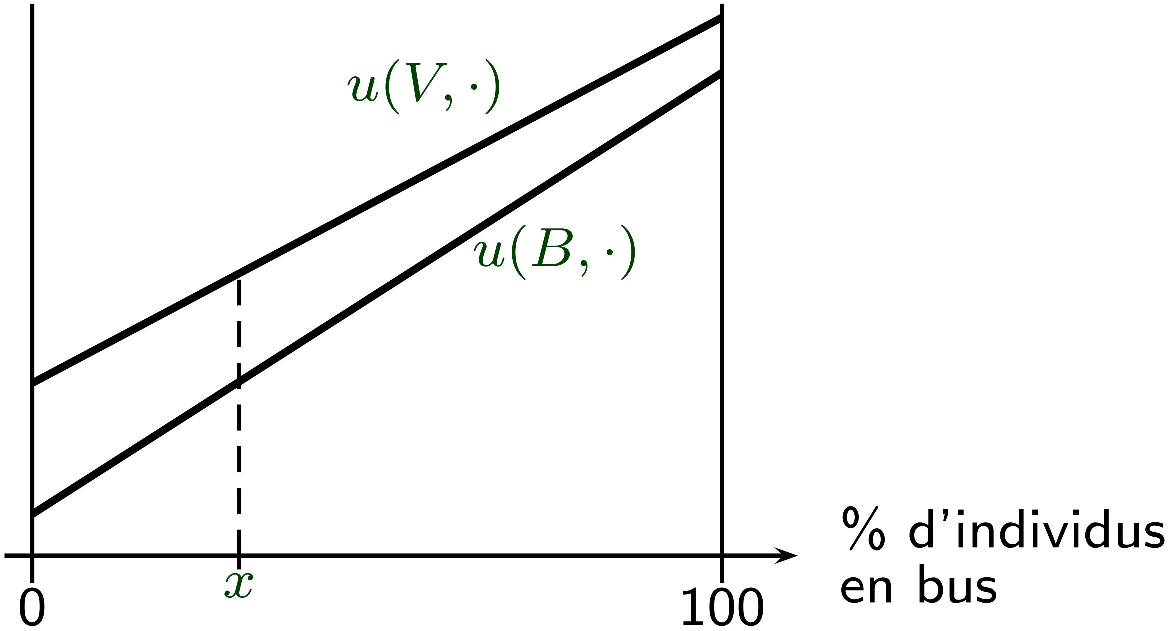
$u(V, x) > u(B, x)$ pour tout x

Premier exemple : Bus ou voiture ?

$N = [0, 1] =$ population d'une ville (**les joueurs**)

Choix de chaque joueur : "prendre la voiture" ou "prendre le bus" (**les actions**)

x % prennent le bus $\Rightarrow$ utilités $u(B, x)$, $u(V, x)$ (**les préférences**)



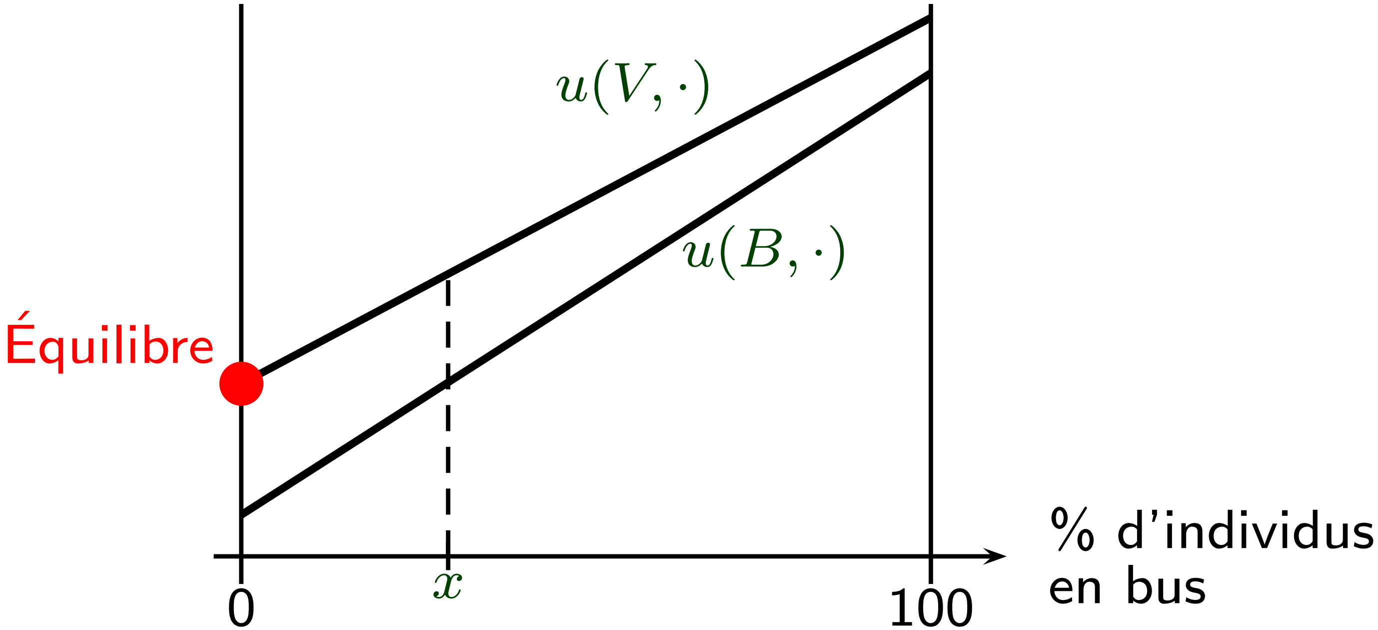
$u(V, x) > u(B, x)$ pour tout $x \Rightarrow$ tout le monde prend la voiture ($x = 0$)

Premier exemple : Bus ou voiture ?

$N = [0,1] =$ population d'une ville (**les joueurs**)

Choix de chaque joueur : "prendre la voiture" ou "prendre le bus" (**les actions**)

x % prennent le bus $\Rightarrow$ utilités $u(B,x)$, $u(V,x)$ (**les préférences**)



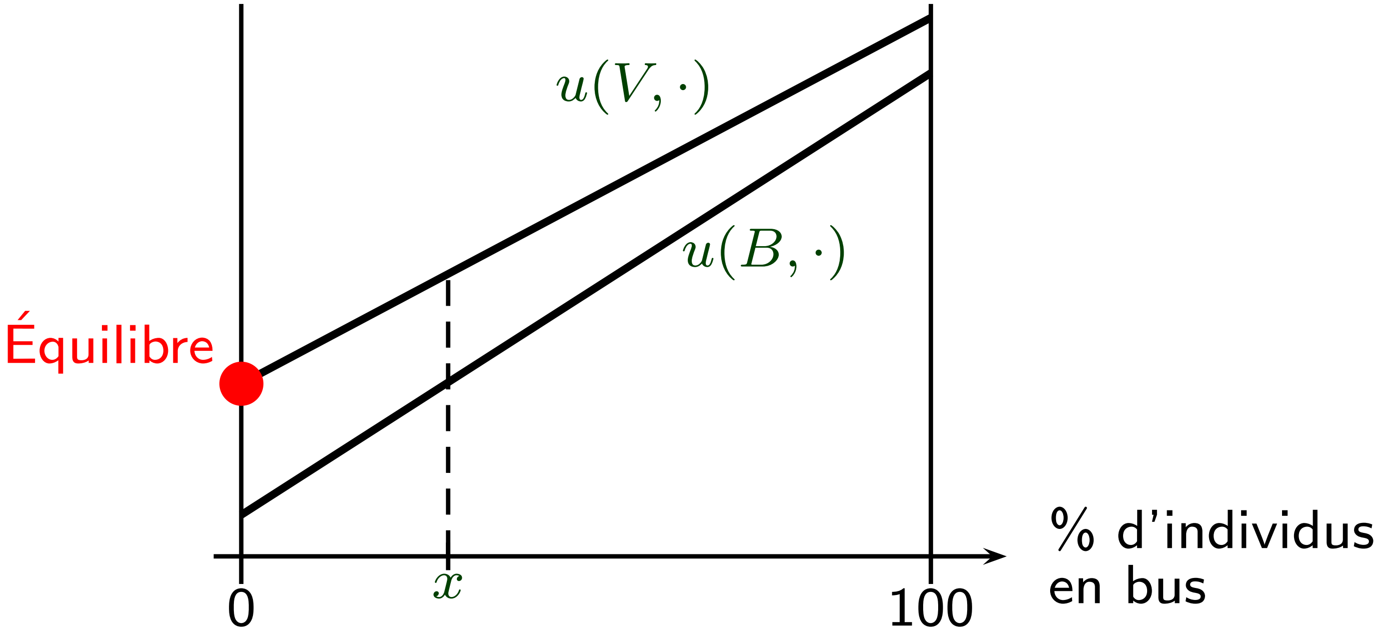
$u(V,x) > u(B,x)$ pour tout $x \Rightarrow$ tout le monde prend la voiture ($x = 0$)

Premier exemple : Bus ou voiture ?

$N = [0, 1]$ = population d'une ville (**les joueurs**)

Choix de chaque joueur : "prendre la voiture" ou "prendre le bus" (**les actions**)

x % prennent le bus $\Rightarrow$ utilités $u(B, x)$, $u(V, x)$ (**les préférences**)



$u(V, x) > u(B, x)$ pour tout $x \Rightarrow$ tout le monde prend la voiture ($x = 0$)

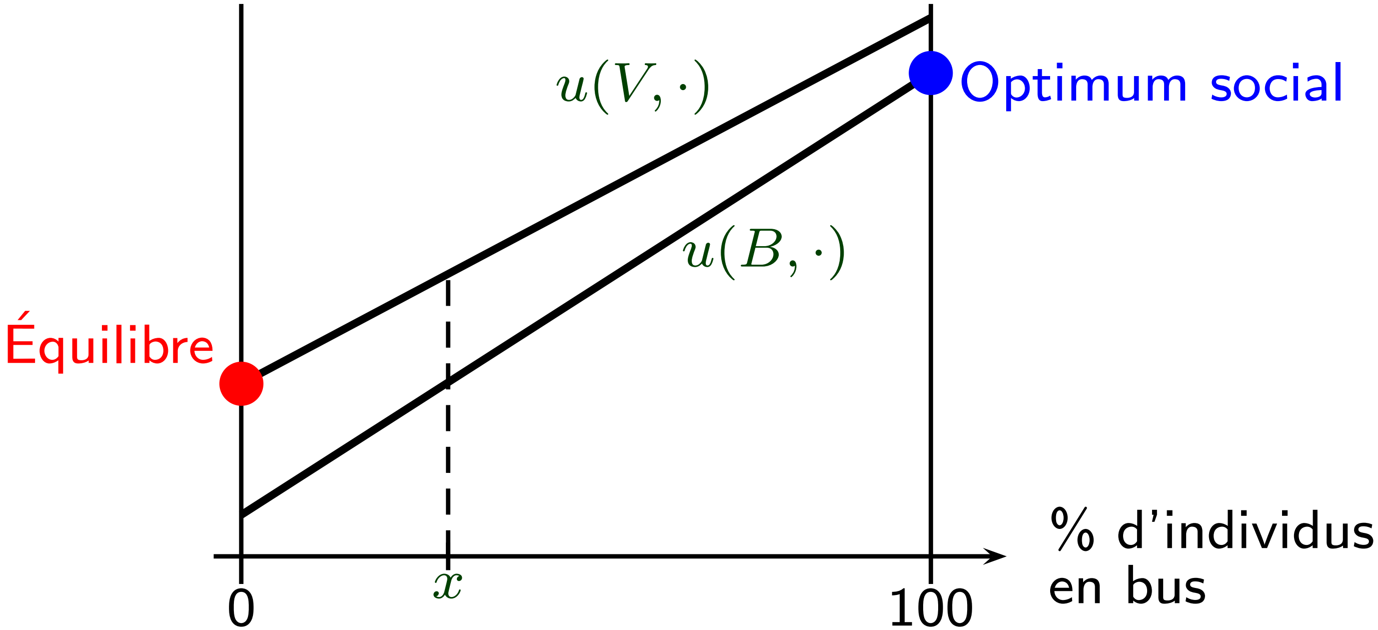
$\Rightarrow u(V, 0)$ pour tous

Premier exemple : Bus ou voiture ?

$N = [0, 1] =$ population d'une ville (**les joueurs**)

Choix de chaque joueur : "prendre la voiture" ou "prendre le bus" (**les actions**)

x % prennent le bus $\Rightarrow$ utilités $u(B, x)$, $u(V, x)$ (**les préférences**)



$u(V, x) > u(B, x)$ pour tout $x \Rightarrow$ tout le monde prend la voiture ($x = 0$)

$\Rightarrow u(V, 0)$ pour tous $\Rightarrow$ inefficace car si tout le monde prenait le bus ($x = 100$) le niveau de satisfaction de tous les individus serait plus important ($u(B, 100) > u(V, 0)$)

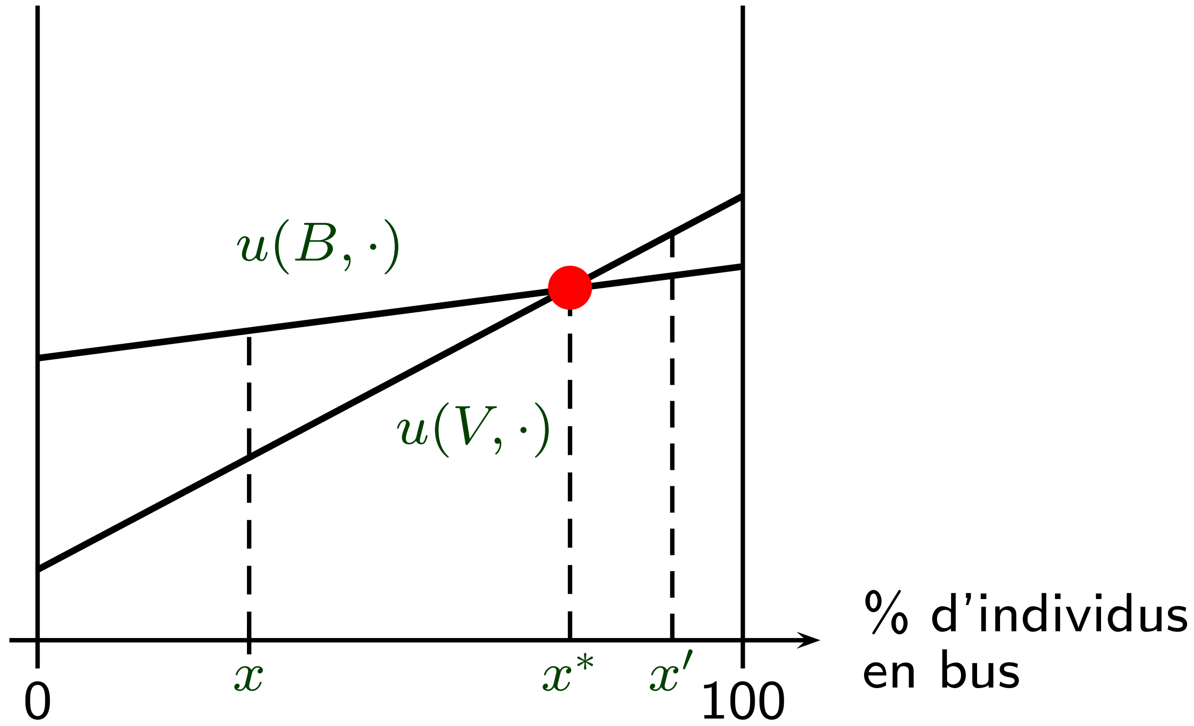
Politique de transport (péages, lignes de bus, . . .)

Politique de transport (péages, lignes de bus, . . .)

➠ nouvelle configuration

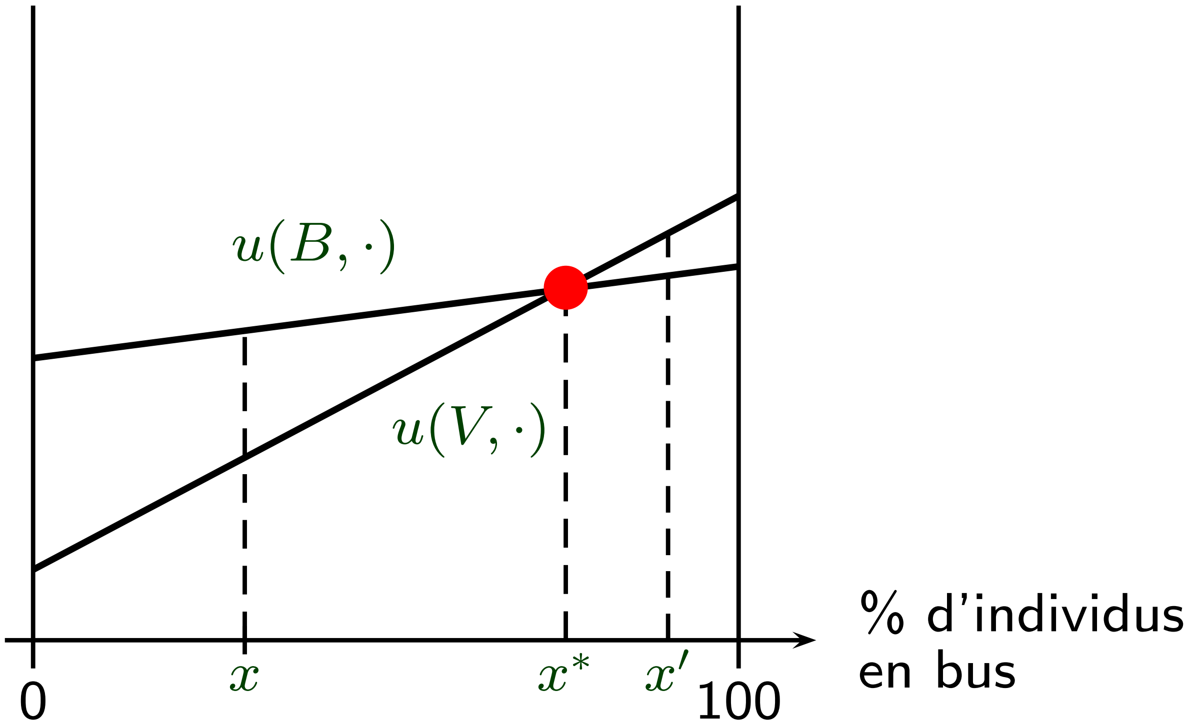
Politique de transport (péages, lignes de bus, . . .)

➠ nouvelle configuration



Politique de transport (péages, lignes de bus, . . .)

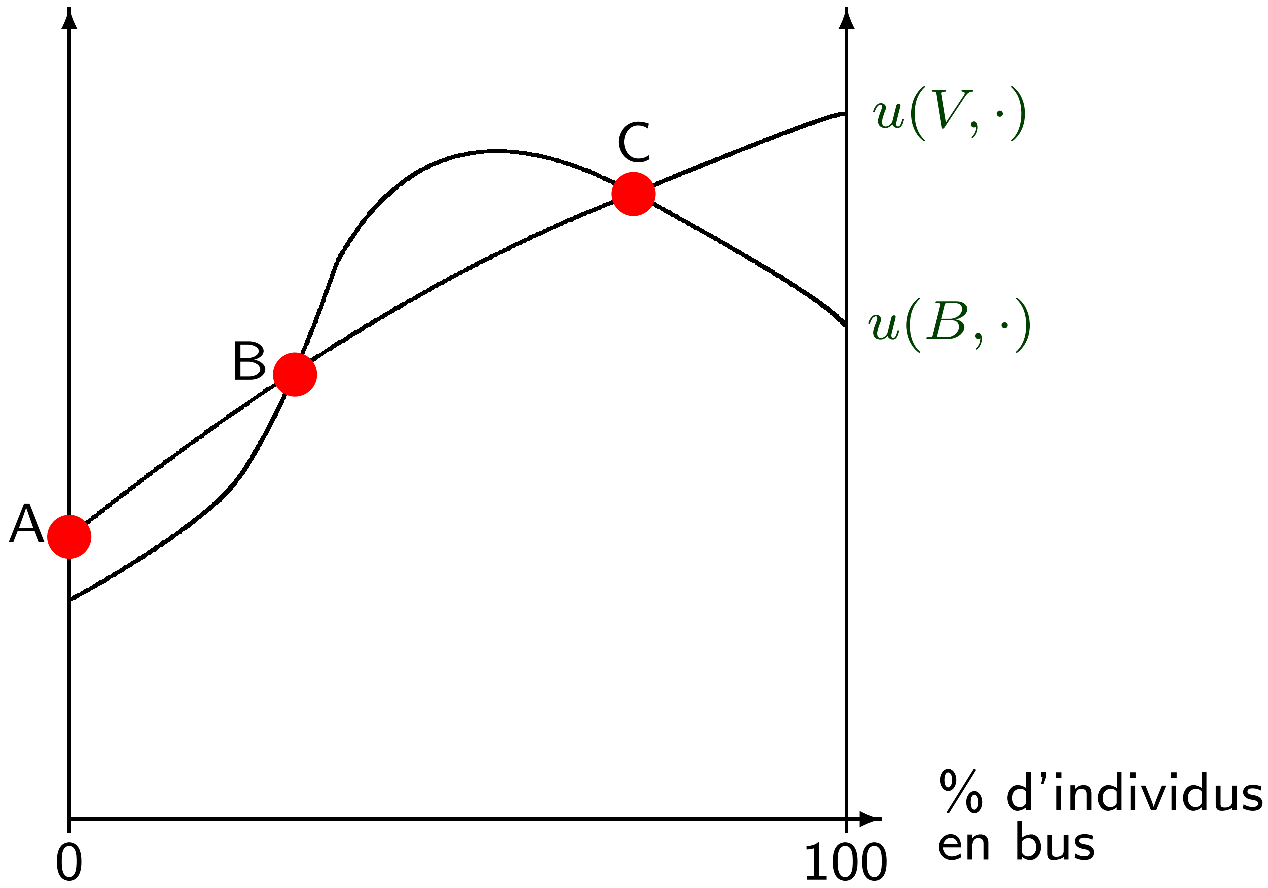
➠ nouvelle configuration



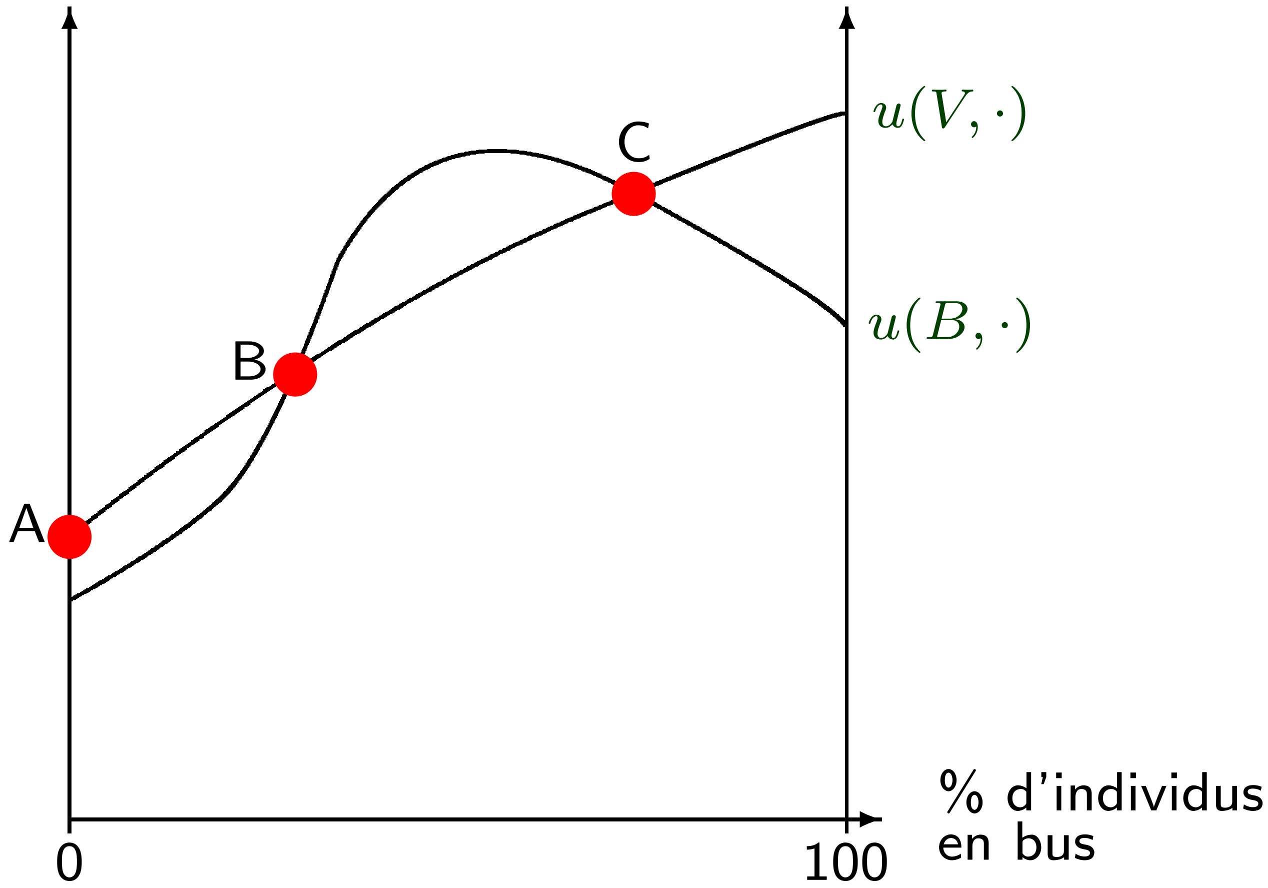
➠ nouvel équilibre (de Nash) plus efficace (mais pas Pareto optimal)

Configuration alternative : multiplicité d'équilibres

Configuration alternative : multiplicité d'équilibres



Configuration alternative : multiplicité d'équilibres

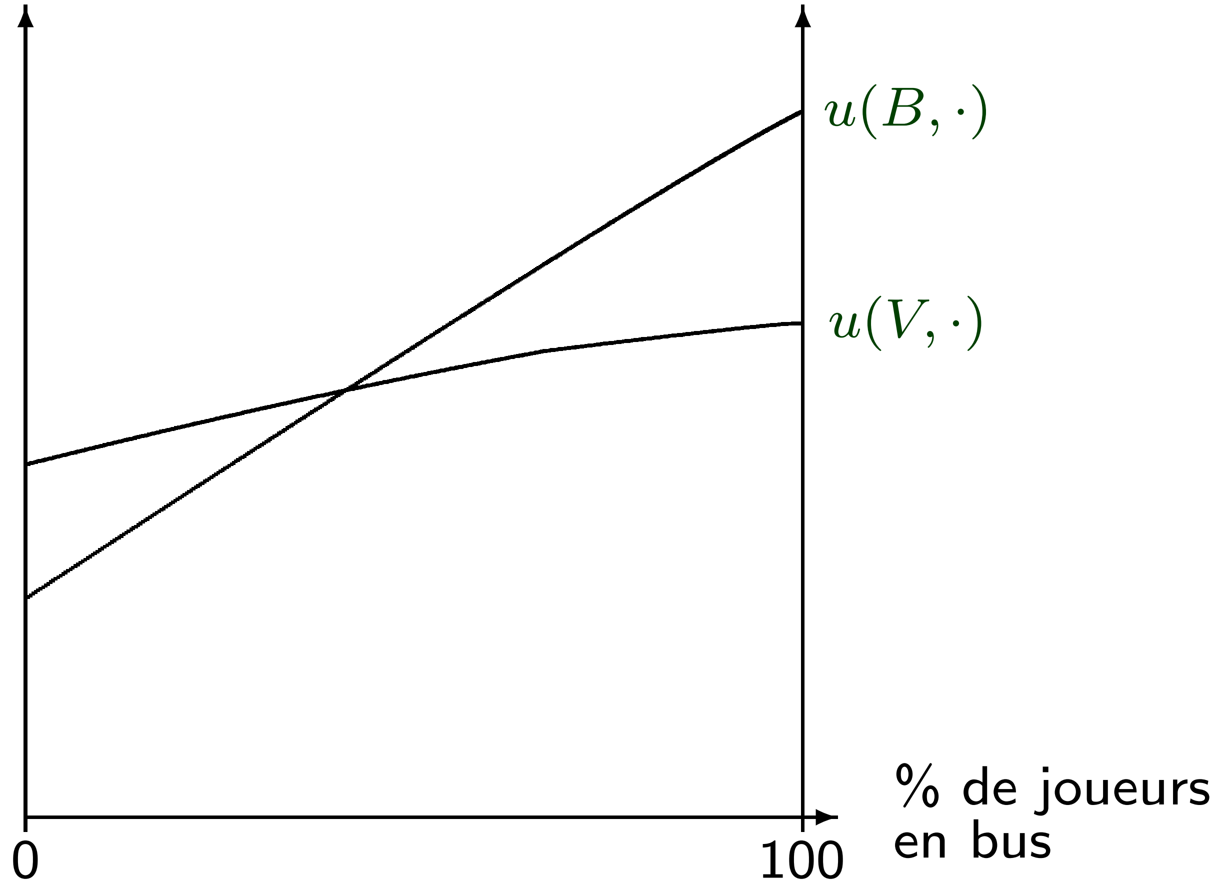


A : équilibre stable et inefficace (Pareto dominé)

B : équilibre instable et inefficace (Pareto dominé)

C : équilibre stable et Pareto optimal

✍ Déterminez les équilibres (de Nash) dans la configuration suivante. Lesquels sont stables ? Lesquels sont Pareto optimaux ?



Deuxième exemple : Partage de gâteau

Deuxième exemple : Partage de gâteau

$N = \{1, 2\} =$ deux enfants (**les joueurs**)

Deuxième exemple : Partage de gâteau

$N = \{1, 2\}$ = deux enfants (**les joueurs**)

Le premier enfant découpe le gâteau en deux parts puis laisse le deuxième enfant choisir son morceau (**les règles** : actions, déroulement, ...)

Deuxième exemple : Partage de gâteau

$N = \{1, 2\}$ = deux enfants (**les joueurs**)

Le premier enfant découpe le gâteau en deux parts puis laisse le deuxième enfant choisir son morceau (**les règles** : actions, déroulement, . . .)

Objectif de chaque enfant : avoir la plus grosse part (**les préférences**)

Deuxième exemple : Partage de gâteau

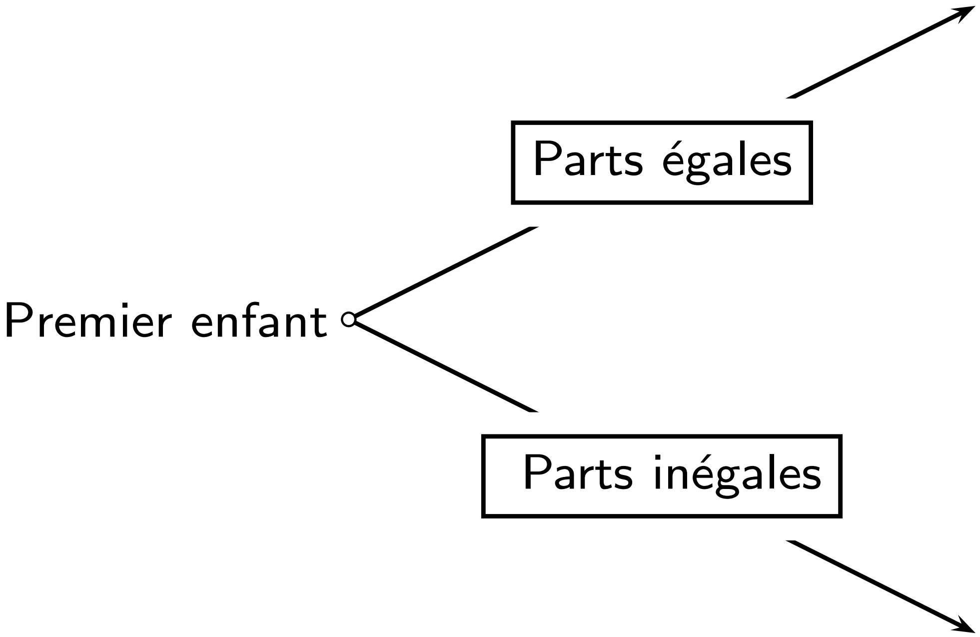
$N = \{1, 2\} =$ deux enfants (**les joueurs**)

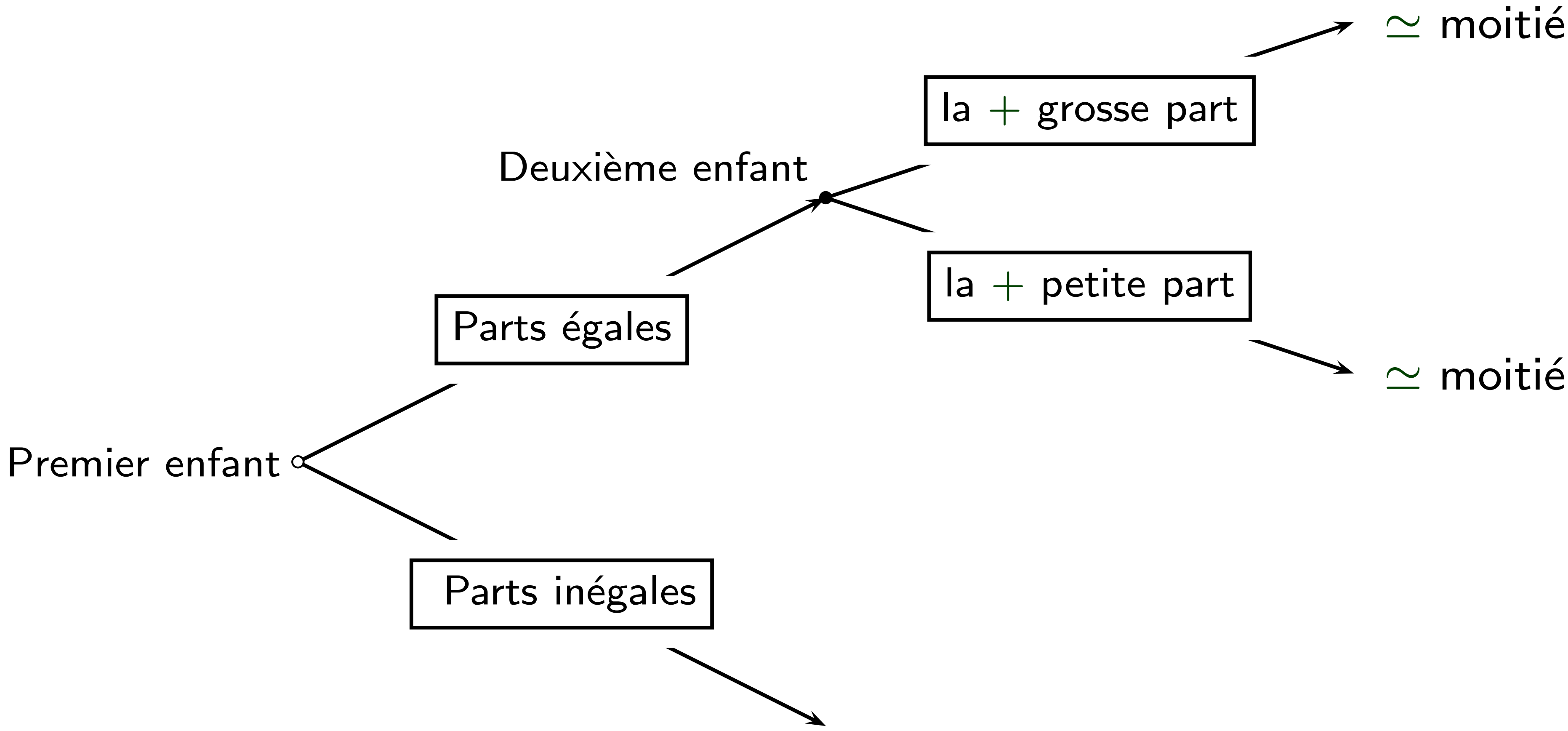
Le premier enfant découpe le gâteau en deux parts puis laisse le deuxième enfant choisir son morceau (**les règles** : actions, déroulement, . . .)

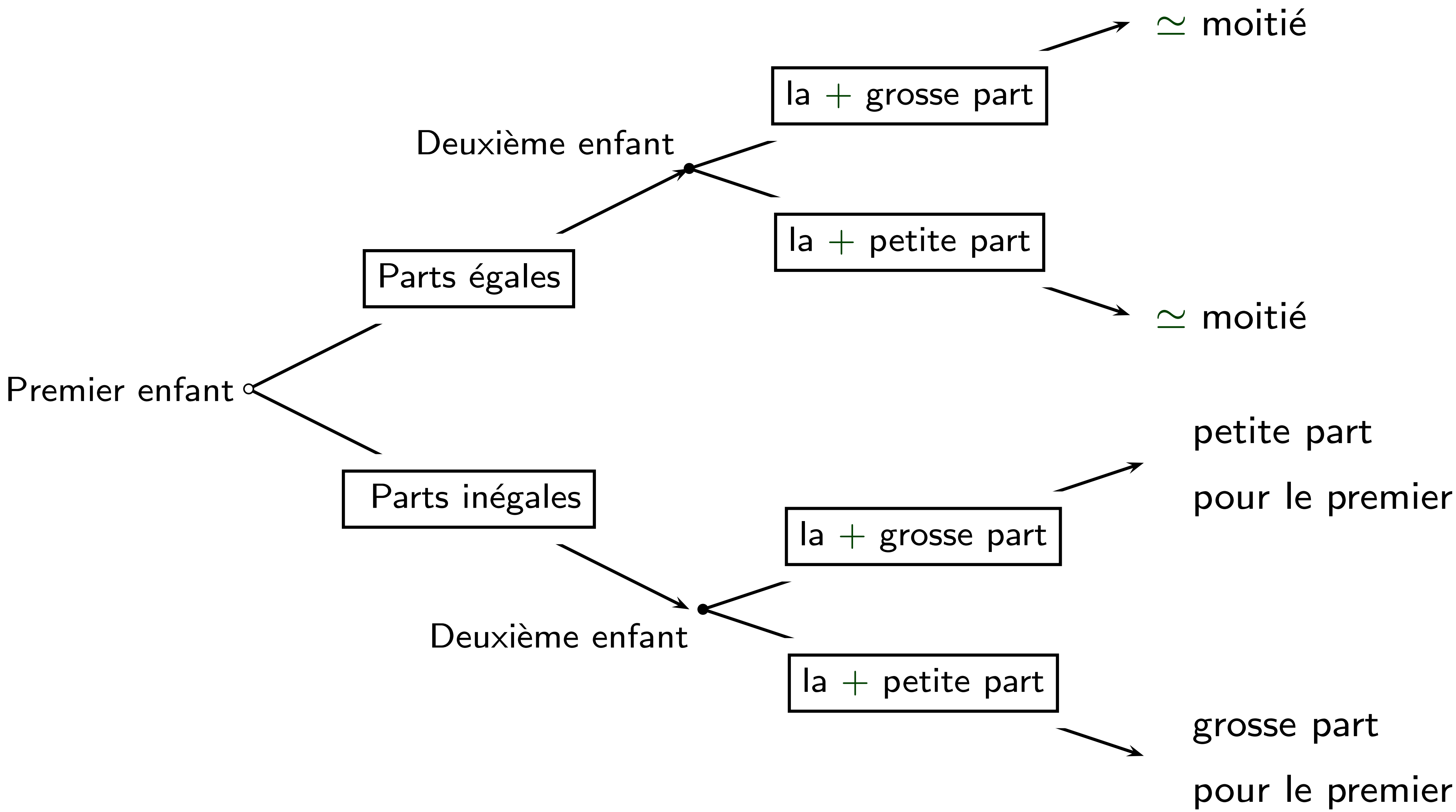
Objectif de chaque enfant : avoir la plus grosse part (**les préférences**)

➥ Diagramme de tous les coups possibles :

Arbre de jeu ou **jeu sous forme extensive**


Premier enfant
Parts égales
Parts inégales


Premier enfant
Parts égales
Parts inégales
Deuxième enfant
la + grosse part
la + petite part
≃ moitié
≃ moitié


Premier enfant
Parts égales
Parts inégales
Deuxième enfant
la + grosse part
la + petite part
≃ moitié
≃ moitié
Deuxième enfant
la + grosse part
la + petite part
petite part pour le premier
grosse part pour le premier

Meilleure stratégie du premier enfant : essayer de partager le gâteau de manière égale

Meilleure stratégie du premier enfant : essayer de partager le gâteau de manière égale

➠ Solution équitable, mais ne doit rien à la générosité, l'altruisme ou à un sens de l'équité (chacun poursuit rationnellement son intérêt personnel)

Autre représentation possible :

Tableau de résultat ou **jeu sous forme stratégique/normale**

Autre représentation possible :

Tableau de résultat ou **jeu sous forme stratégique/normale**

- Stratégies du premier enfant :

$E =$ faire des parts (à peu près) égales $\quad I =$ faire des part inégales

Autre représentation possible :

Tableau de résultat ou **jeu sous forme stratégique/normale**

- Stratégies du premier enfant :

$E =$ faire des parts (à peu près) égales $I =$ faire des part inégales

- Stratégies du deuxième enfant :

Autre représentation possible :

Tableau de résultat ou **jeu sous forme stratégique/normale**

- Stratégies du premier enfant :

$E =$ faire des parts (à peu près) égales $I =$ faire des part inégales

- Stratégies du deuxième enfant :

$G =$ toujours prendre la plus grosse part $P =$ toujours prendre la plus petite part

Autre représentation possible :

Tableau de résultat ou **jeu sous forme stratégique/normale**

- Stratégies du premier enfant :

$E =$ faire des parts (à peu près) égales $I =$ faire des part inégales

- Stratégies du deuxième enfant :

$G =$ toujours prendre la plus grosse part $P =$ toujours prendre la plus petite part

$(P \mid E, G \mid I) =$ prendre la plus grosse part seulement si les parts sont inégales

Autre représentation possible :

Tableau de résultat ou **jeu sous forme stratégique/normale**

- Stratégies du premier enfant :

$E =$ faire des parts (à peu près) égales $I =$ faire des part inégales

- Stratégies du deuxième enfant :

$G =$ toujours prendre la plus grosse part $P =$ toujours prendre la plus petite part

$(P \mid E, G \mid I) =$ prendre la plus grosse part seulement si les parts sont inégales

$(G \mid E, P \mid I) =$ prendre la plus grosse part (de quelques miettes) seulement si les parts sont égales

Autre représentation possible :

Tableau de résultat ou **jeu sous forme stratégique/normale**

- Stratégies du premier enfant :

$E =$ faire des parts (à peu près) égales $I =$ faire des part inégales

- Stratégies du deuxième enfant :

$G =$ toujours prendre la plus grosse part $P =$ toujours prendre la plus petite part

$(P \mid E,\, G \mid I) =$ prendre la plus grosse part seulement si les parts sont inégales

$(G \mid E,\, P \mid I) =$ prendre la plus grosse part (de quelques miettes) seulement si les parts sont égales

		$2^{\text{ème}}$ enfant			
		G	P	$(P \mid E,\, G \mid I)$	$(G \mid E,\, P \mid I)$
1^{er} enfant	E	$\simeq$ moitié	$\simeq$ moitié	$\simeq$ moitié	$\simeq$ moitié
	I	petite part	grosse part	petite part	grosse part

✍ Autre exemple simple (sauf pour Charlie Brown) d'induction à rebours :

Ordre réel des décisions et anticipation de la réponse de son rival : image

– Représentez la situation sous la forme d'arbre de jeu (jeu sous forme extensive) et déterminez les stratégies optimales des joueurs
– Représentez la situation sous la forme d'un tableau de résultat (jeu sous forme normale)

Troisième exemple : Valeur stratégique de l'information

Troisième exemple : Valeur stratégique de l'information

Deux firmes

Troisième exemple : Valeur stratégique de l'information

Deux firmes

Deux projets possibles : a et b

Troisième exemple : Valeur stratégique de l'information

Deux firmes

Deux projets possibles : a et b

La firme 1 choisit un des deux projets, puis la firme 2 choisit un des deux projets après avoir observé le choix de la firme 1

Troisième exemple : Valeur stratégique de l'information

Deux firmes

Deux projets possibles : a et b

La firme 1 choisit un des deux projets, puis la firme 2 choisit un des deux projets après avoir observé le choix de la firme 1

Deux états/situations possibles, équiprobables ($\Pr[\alpha] = \Pr[\beta] = 1/2$) :

- α : Seul le projet a est rentable
- β : Seul le projet b est rentable

Troisième exemple : Valeur stratégique de l'information

Deux firmes

Deux projets possibles : a et b

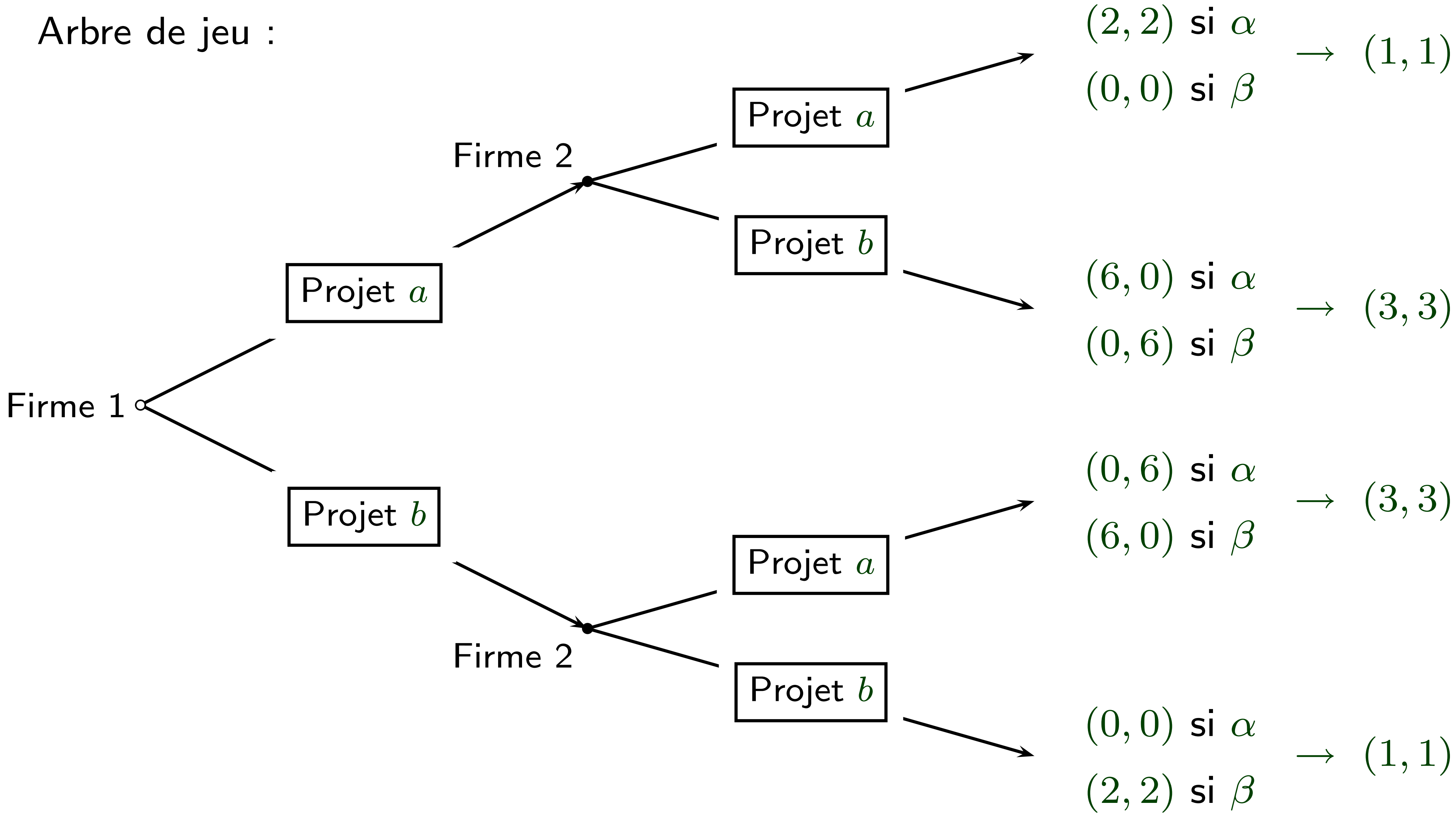
La firme 1 choisit un des deux projets, puis la firme 2 choisit un des deux projets après avoir observé le choix de la firme 1

Deux états/situations possibles, équiprobables ($\mathrm{Pr}[\alpha] = \mathrm{Pr}[\beta] = 1/2$) :

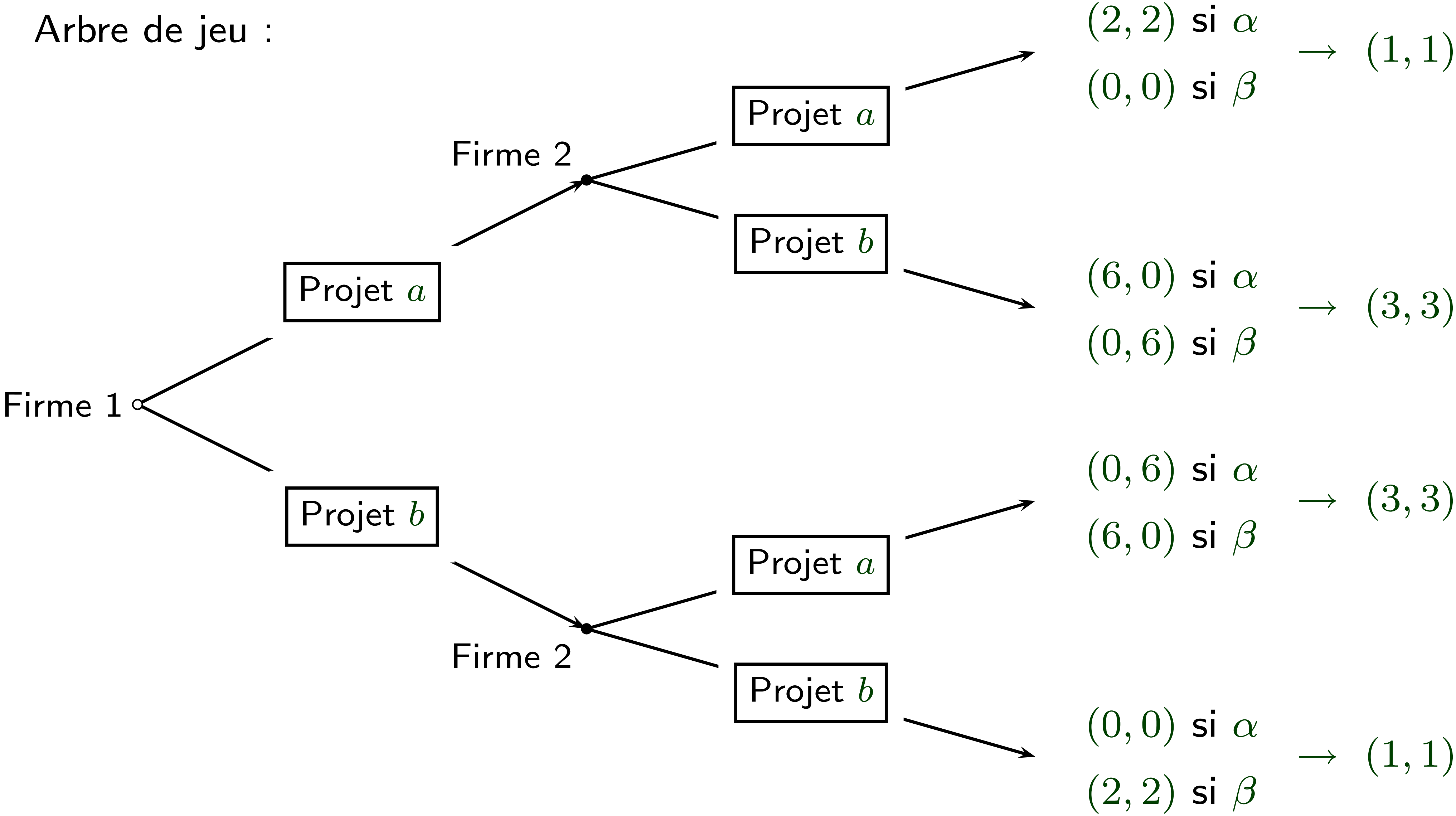
α : Seul le projet a est rentable
β : Seul le projet b est rentable

- **Firmes 1 et 2 non informées.**

Arbre de jeu :


Firme 1
Projet a
Projet b
Firme 2
Projet a
Projet b
$(2,2)$ si α
$(0,0)$ si β
$\rightarrow$ $(1,1)$
$(6,0)$ si α
$(0,6)$ si β
$\rightarrow$ $(3,3)$
Firme 2
Projet a
Projet b
$(0,6)$ si α
$(6,0)$ si β
$\rightarrow$ $(3,3)$
$(0,0)$ si α
$(2,2)$ si β
$\rightarrow$ $(1,1)$

Arbre de jeu :

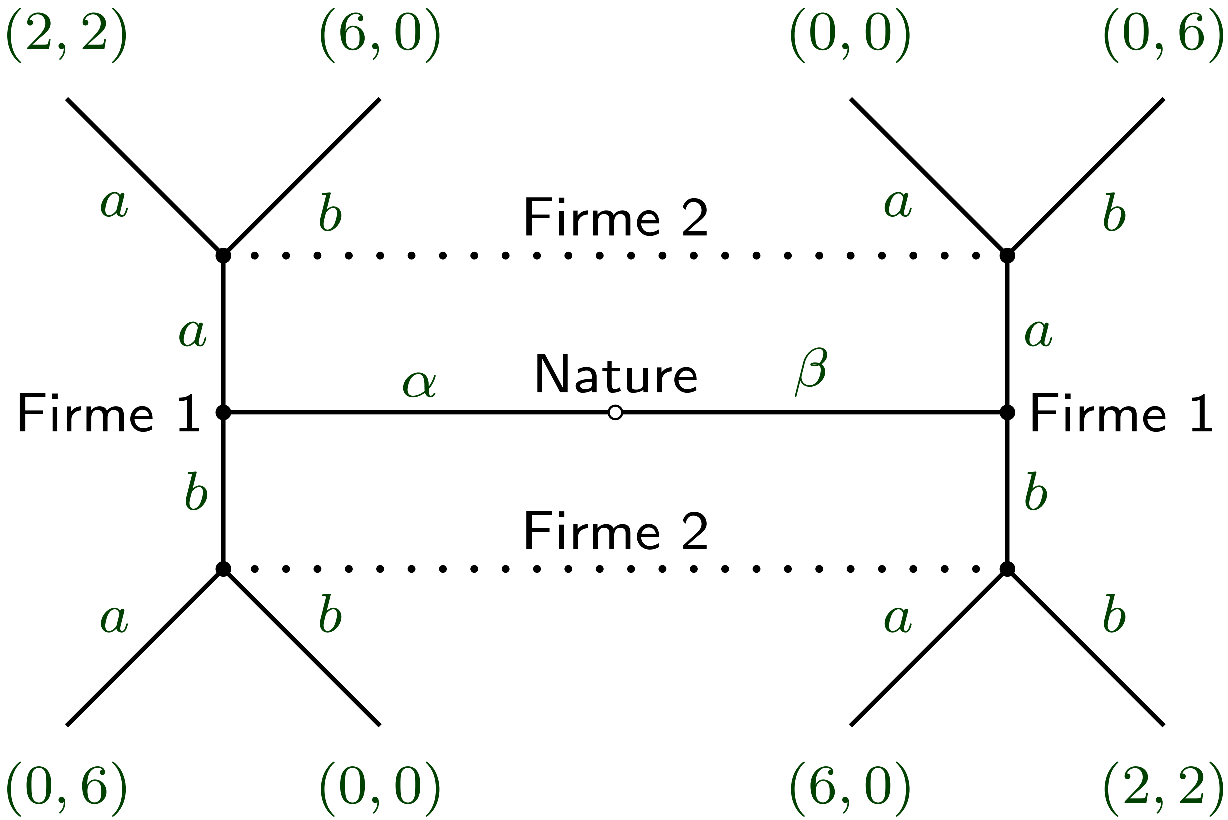


➠ La firme 2 choisit toujours un projet différent de la firme 1, donc l'utilité espérée de chaque firme est égale à 3

- **Firme 1 informée et firme 2 non informée.**

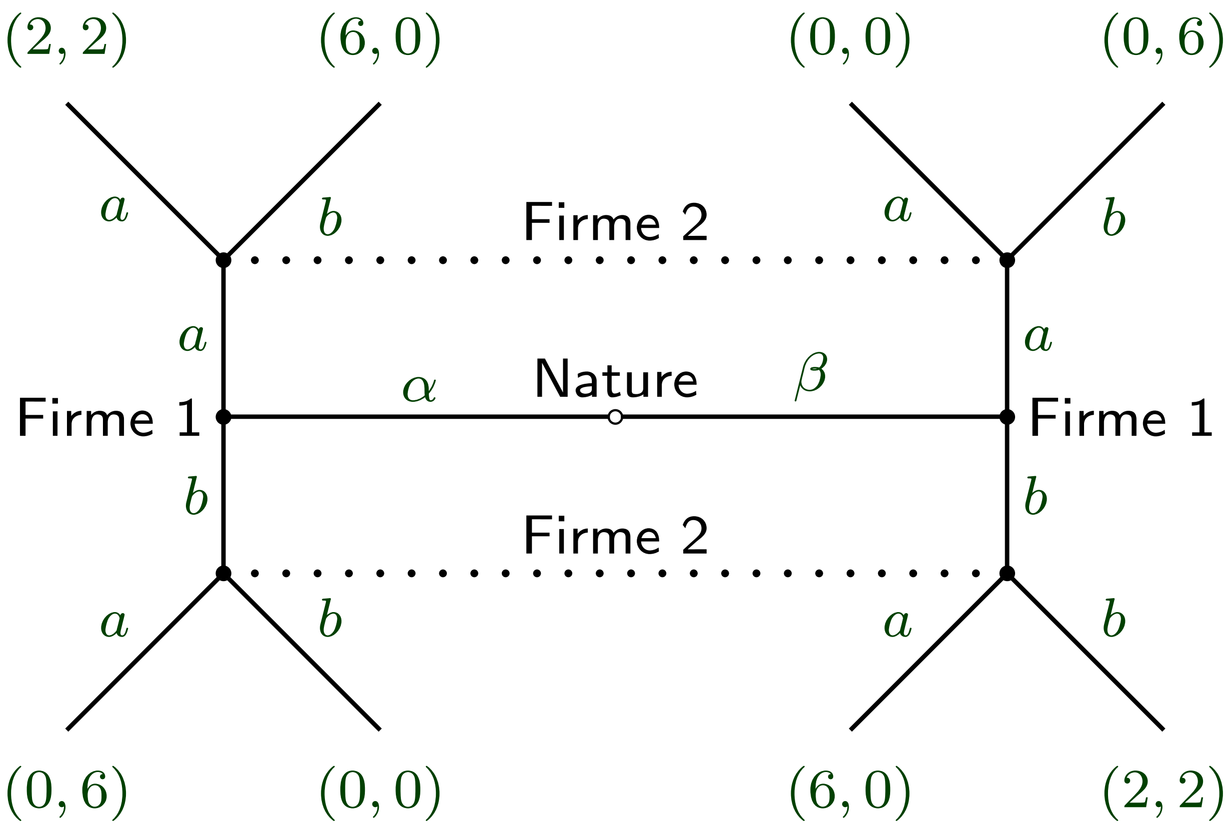
- **Firme 1 informée et firme 2 non informée.**

Arbre de jeu (à information imparfaite) :



- **Firme 1 informée et firme 2 non informée.**

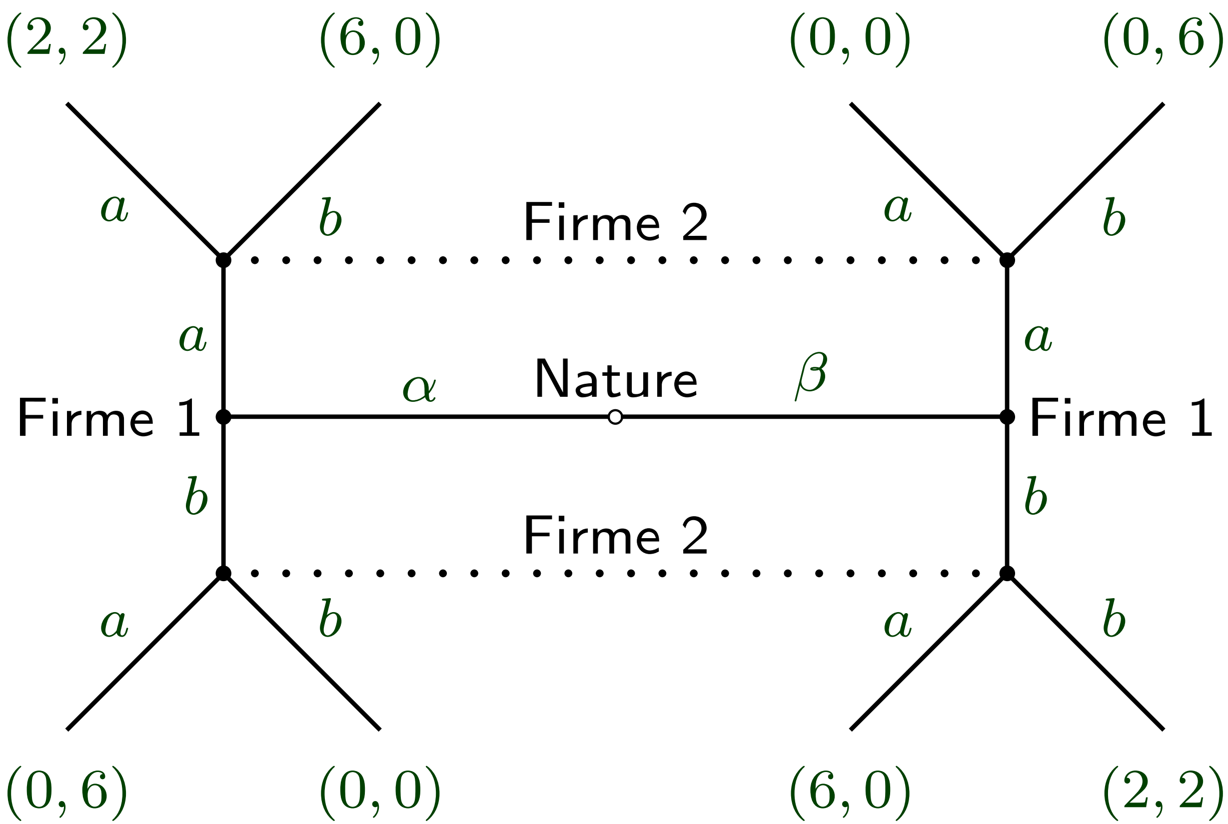
Arbre de jeu (à information imparfaite) :



➠ La firme 2 choisit le même projet que la firme 1, donc l'utilité espérée de chaque firme est égale à $2 < 3$

- **Firme 1 informée et firme 2 non informée.**

Arbre de jeu (à information imparfaite) :



➠ La firme 2 choisit le même projet que la firme 1, donc l'utilité espérée de chaque firme est égale à $2 < 3$

➠ Valeur stratégique de l'information **négative** pour la firme 1 ! ($\neq$ problème de décision **individuelle**). Mais la firme 2 sait que la firme 1 sait . . .

Définition générale d'un jeu

Définition générale d'un jeu

– L'ensemble des **joueurs**

Définition générale d'un jeu

- L'ensemble des **joueurs**
- Les **règles** du jeu (qui peut faire quoi et quand)

Définition générale d'un jeu

– L'ensemble des **joueurs**

– Les **règles** du jeu (qui peut faire quoi et quand)

– L'**information** dont disposent les joueurs (sur le nombre de joueurs, les règles, les préférences, et l'information des autres)

Définition générale d'un jeu

- L'ensemble des **joueurs**
- Les **règles** du jeu (qui peut faire quoi et quand)
- L'**information** dont disposent les joueurs (sur le nombre de joueurs, les règles, les préférences, et l'information des autres)
- Les **préférences** des joueurs sur les enchaînements d'actions et leurs issues. Généralement, fonctions d'utilité espérées de type von Neumann et Morgenstern

Définition générale d'un jeu

- L'ensemble des **joueurs**
- Les **règles** du jeu (qui peut faire quoi et quand)
- L'**information** dont disposent les joueurs (sur le nombre de joueurs, les règles, les préférences, et l'information des autres)
- Les **préférences** des joueurs sur les enchaînements d'actions et leurs issues. Généralement, fonctions d'utilité espérées de type von Neumann et Morgenstern

Théorie des jeux $\neq$ optimisation, théorie de la décision

Définition générale d'un jeu

- L'ensemble des **joueurs**
- Les **règles** du jeu (qui peut faire quoi et quand)
- L'**information** dont disposent les joueurs (sur le nombre de joueurs, les règles, les préférences, et l'information des autres)
- Les **préférences** des joueurs sur les enchaînements d'actions et leurs issues. Généralement, fonctions d'utilité espérées de type von Neumann et Morgenstern

Théorie des jeux $\neq$ optimisation, théorie de la décision

- Résolution du jeu non automatique : concept de solution et solution elle-même rarement uniques

Définition générale d'un jeu

– L'ensemble des **joueurs**

– Les **règles** du jeu (qui peut faire quoi et quand)

– L'**information** dont disposent les joueurs (sur le nombre de joueurs, les règles, les préférences, et l'information des autres)

– Les **préférences** des joueurs sur les enchaînements d'actions et leurs issues. Généralement, fonctions d'utilité espérées de type von Neumann et Morgenstern

Théorie des jeux $\neq$ optimisation, théorie de la décision

– Résolution du jeu non automatique : concept de solution et solution elle-même rarement uniques

– Problème de la définition circulaire de la rationalité

Définition générale d'un jeu

- L'ensemble des **joueurs**
- Les **règles** du jeu (qui peut faire quoi et quand)
- L'**information** dont disposent les joueurs (sur le nombre de joueurs, les règles, les préférences, et l'information des autres)
- Les **préférences** des joueurs sur les enchaînements d'actions et leurs issues. Généralement, fonctions d'utilité espérées de type von Neumann et Morgenstern

Théorie des jeux $\neq$ optimisation, théorie de la décision

- Résolution du jeu non automatique : concept de solution et solution elle-même rarement uniques
- Problème de la définition circulaire de la rationalité
- Problème des connaissances itérées

Définition générale d'un jeu

- L'ensemble des **joueurs**
- Les **règles** du jeu (qui peut faire quoi et quand)
- L'**information** dont disposent les joueurs (sur le nombre de joueurs, les règles, les préférences, et l'information des autres)
- Les **préférences** des joueurs sur les enchaînements d'actions et leurs issues. Généralement, fonctions d'utilité espérées de type von Neumann et Morgenstern

Théorie des jeux $\neq$ optimisation, théorie de la décision

- Résolution du jeu non automatique : concept de solution et solution elle-même rarement uniques
- Problème de la définition circulaire de la rationalité
- Problème des connaissances itérées

  $\Rightarrow$ quels concepts de solution "raisonnables" ?

Définition générale d'un jeu

- L'ensemble des **joueurs**
- Les **règles** du jeu (qui peut faire quoi et quand)
- L'**information** dont disposent les joueurs (sur le nombre de joueurs, les règles, les préférences, et l'information des autres)
- Les **préférences** des joueurs sur les enchaînements d'actions et leurs issues. Généralement, fonctions d'utilité espérées de type von Neumann et Morgenstern

Théorie des jeux $\neq$ optimisation, théorie de la décision

- Résolution du jeu non automatique : concept de solution et solution elle-même rarement uniques
- Problème de la définition circulaire de la rationalité
- Problème des connaissances itérées

  $\Rightarrow$ quels concepts de solution "raisonnables" ?

Hypothèses courantes : Rationalité (préférences rationnelles / maximisation de l'utilité) et "Intelligence"

Historique

Historique

- Cournot (1838, Chap. 7) : équilibre en duopole

Historique

- Cournot (1838, Chap. 7) : équilibre en duopole
- Edgeworth (1881) : courbe de contrat, concept de “coeur”

Historique

- Cournot (1838, Chap. 7) : équilibre en duopole
- Edgeworth (1881) : courbe de contrat, concept de “coeur”
- Darwin (1871) : biologie évolutionniste, sélection naturelle

Historique

- Cournot (1838, Chap. 7) : équilibre en duopole
- Edgeworth (1881) : courbe de contrat, concept de “coeur”
- Darwin (1871) : biologie évolutionniste, sélection naturelle
- Zermelo (1913) : positions gagnantes dans le jeu d’échec

Historique

- Cournot (1838, Chap. 7) : équilibre en duopole
- Edgeworth (1881) : courbe de contrat, concept de “coeur”
- Darwin (1871) : biologie évolutionniste, sélection naturelle

- Zermelo (1913) : positions gagnantes dans le jeu d’échec
- Emile Borel (1921) : stratégie mixte (aléatoire)

Historique

– Cournot (1838, Chap. 7) : équilibre en duopole

– Edgeworth (1881) : courbe de contrat, concept de “coeur”

– Darwin (1871) : biologie évolutionniste, sélection naturelle

– Zermelo (1913) : positions gagnantes dans le jeu d’échec

– Emile Borel (1921) : stratégie mixte (aléatoire)

– Von Neumann (1928) : théorème de maximin (compétition pure à deux joueurs)

Historique

- Cournot (1838, Chap. 7) : équilibre en duopole
- Edgeworth (1881) : courbe de contrat, concept de “coeur”
- Darwin (1871) : biologie évolutionniste, sélection naturelle

- Zermelo (1913) : positions gagnantes dans le jeu d’échec
- Emile Borel (1921) : stratégie mixte (aléatoire)
- Von Neumann (1928) : théorème de maximin (compétition pure à deux joueurs)

- Von Neumann et Morgenstern (1944), “*Theory of Games and Economic Behavior*”

Historique

- Cournot (1838, Chap. 7) : équilibre en duopole
- Edgeworth (1881) : courbe de contrat, concept de “coeur”
- Darwin (1871) : biologie évolutionniste, sélection naturelle

- Zermelo (1913) : positions gagnantes dans le jeu d’échec
- Emile Borel (1921) : stratégie mixte (aléatoire)
- Von Neumann (1928) : théorème de maximin (compétition pure à deux joueurs)

- Von Neumann et Morgenstern (1944), “*Theory of Games and Economic Behavior*”
- Nash (1950b, 1951) : notion d’équilibre, jeux généraux

Historique

- Cournot (1838, Chap. 7) : équilibre en duopole
- Edgeworth (1881) : courbe de contrat, concept de “coeur”
- Darwin (1871) : biologie évolutionniste, sélection naturelle

- Zermelo (1913) : positions gagnantes dans le jeu d’échec
- Emile Borel (1921) : stratégie mixte (aléatoire)
- Von Neumann (1928) : théorème de maximin (compétition pure à deux joueurs)

- Von Neumann et Morgenstern (1944), “*Theory of Games and Economic Behavior*”
- Nash (1950b, 1951) : notion d’équilibre, jeux généraux
- Nash (1950a, 1953) : solution de négociation

Historique

– Cournot (1838, Chap. 7) : équilibre en duopole

– Edgeworth (1881) : courbe de contrat, concept de “coeur”

– Darwin (1871) : biologie évolutionniste, sélection naturelle

– Zermelo (1913) : positions gagnantes dans le jeu d’échec

– Emile Borel (1921) : stratégie mixte (aléatoire)

– Von Neumann (1928) : théorème de maximin (compétition pure à deux joueurs)

– Von Neumann et Morgenstern (1944), “*Theory of Games and Economic Behavior*”

– Nash (1950b, 1951) : notion d’équilibre, jeux généraux

– Nash (1950a, 1953) : solution de négociation

– Shapley (1952–1953) : “coeur” et valeur d’un jeu coopératif

Historique

– Cournot (1838, Chap. 7) : équilibre en duopole
– Edgeworth (1881) : courbe de contrat, concept de “coeur”
– Darwin (1871) : biologie évolutionniste, sélection naturelle

– Zermelo (1913) : positions gagnantes dans le jeu d’échec
– Emile Borel (1921) : stratégie mixte (aléatoire)
– Von Neumann (1928) : théorème de maximin (compétition pure à deux joueurs)

– Von Neumann et Morgenstern (1944), “*Theory of Games and Economic Behavior*”
– Nash (1950b, 1951) : notion d’équilibre, jeux généraux
– Nash (1950a, 1953) : solution de négociation
– Shapley (1952–1953) : “coeur” et valeur d’un jeu coopératif
– Aumann (1959) : jeux répétés et “folk theorems”

– Selten (1965, 1975), Kreps et Wilson (1982) : raffinements d'équilibre

- Selten (1965, 1975), Kreps et Wilson (1982) : raffinements d'équilibre
- Harsanyi (1967–1968) : information asymétrique (espace des types)

- Selten (1965, 1975), Kreps et Wilson (1982) : raffinements d'équilibre
- Harsanyi (1967–1968) : information asymétrique (espace des types)
- Aumann et Maschler (1966, 1967); Stearns (1967); Aumann et al. (1968) : jeux répétés à information incomplète

- Selten (1965, 1975), Kreps et Wilson (1982) : raffinements d'équilibre
- Harsanyi (1967–1968) : information asymétrique (espace des types)
- Aumann et Maschler (1966, 1967); Stearns (1967); Aumann et al. (1968) : jeux répétés à information incomplète
- Aumann (1974, 1987) : équilibre corrélé, justification épistémique des équilibres

– Selten (1965, 1975), Kreps et Wilson (1982) : raffinements d'équilibre
– Harsanyi (1967–1968) : information asymétrique (espace des types)
– Aumann et Maschler (1966, 1967); Stearns (1967); Aumann et al. (1968) : jeux répétés à information incomplète
– Aumann (1974, 1987) : équilibre corrélé, justification épistémique des équilibres
– Lewis (1969), Aumann (1976) : connaissance commune

- Selten (1965, 1975), Kreps et Wilson (1982) : raffinements d'équilibre
- Harsanyi (1967–1968) : information asymétrique (espace des types)
- Aumann et Maschler (1966, 1967); Stearns (1967); Aumann et al. (1968) : jeux répétés à information incomplète
- Aumann (1974, 1987) : équilibre corrélé, justification épistémique des équilibres
- Lewis (1969), Aumann (1976) : connaissance commune
- Hurwicz, Maskin et Myerson (prix Nobel d'économie 2007) : Théorie des mécanismes

Théorie de la décision

Théorie de la décision

Pré-requis à l'analyse des décisions *interactives* (jeux) : connaître les fondements théoriques et les outils permettant l'analyse des décisions *individuelles* (rationnelles) dans les situations incertaines/risquées, c'est-à-dire dont les conséquences ne sont pas parfaitement connues par le preneur de décision.

Théorie de la décision

Pré-requis à l'analyse des décisions *interactives* (jeux) : connaître les fondements théoriques et les outils permettant l'analyse des décisions *individuelles* (rationnelles) dans les situations incertaines/risquées, c'est-à-dire dont les conséquences ne sont pas parfaitement connues par le preneur de décision.

Environnement certain : Préférence $\succeq$ sur les conséquences C

Théorie de la décision

Pré-requis à l'analyse des décisions *interactives* (jeux) : connaître les fondements théoriques et les outils permettant l'analyse des décisions *individuelles* (rationnelles) dans les situations incertaines/risquées, c'est-à-dire dont les conséquences ne sont pas parfaitement connues par le preneur de décision.

Environnement certain : Préférence $\succeq$ sur les conséquences C

Environnement incertain : Préférence $\succeq$ sur les loteries $\mathcal{L} = \Delta(C)$

Théorie de la décision

Pré-requis à l'analyse des décisions *interactives* (jeux) : connaître les fondements théoriques et les outils permettant l'analyse des décisions *individuelles* (rationnelles) dans les situations incertaines/risquées, c'est-à-dire dont les conséquences ne sont pas parfaitement connues par le preneur de décision.

Environnement certain : Préférence $\succeq$ sur les conséquences C

Environnement incertain : Préférence $\succeq$ sur les loteries $\mathcal{L} = \Delta(C)$

Exemple de loterie (jeu de la roulette) :

Théorie de la décision

Pré-requis à l'analyse des décisions *interactives* (jeux) : connaître les fondements théoriques et les outils permettant l'analyse des décisions *individuelles* (rationnelles) dans les situations incertaines/risquées, c'est-à-dire dont les conséquences ne sont pas parfaitement connues par le preneur de décision.

Environnement certain : Préférence $\succeq$ sur les conséquences C

Environnement incertain : Préférence $\succeq$ sur les loteries $\mathcal{L} = \Delta(C)$

Exemple de loterie (jeu de la roulette) :

Ensemble des cases possibles $= \{00, 0, 1, \ldots, 36\}$ (probabilité $1/38$ pour chaque case)

Considérons les deux alternatives suivantes :

Considérons les deux alternatives suivantes :

- a : Parier 10 € sur pair

Considérons les deux alternatives suivantes :

- a : Parier 10 € sur pair
- a' : Ne pas parier

Considérons les deux alternatives suivantes :

- a : Parier 10 € sur pair
- a' : Ne pas parier

➠ Conséquences $C = \{-10, 0, 10\}$

Considérons les deux alternatives suivantes :

- a : Parier 10 € sur pair
- a' : Ne pas parier

➠ Conséquences $C = \{-10, 0, 10\}$

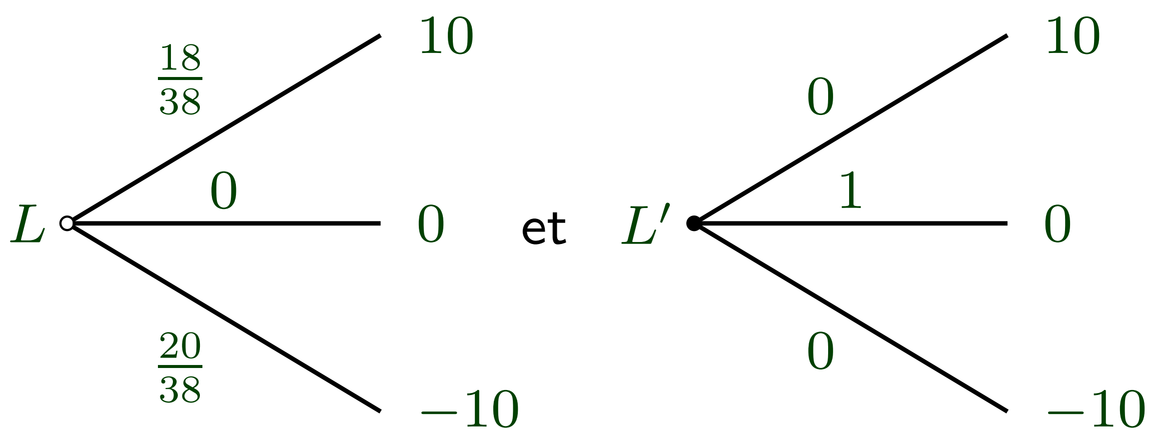
Loteries induites par les alternatives a et a' :

Considérons les deux alternatives suivantes :

- a : Parier 10 € sur pair
- a' : Ne pas parier

➠ Conséquences $C = \{-10, 0, 10\}$

Loteries induites par les alternatives a et a' :

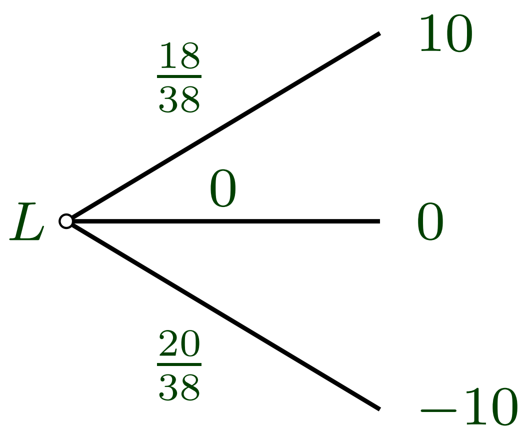


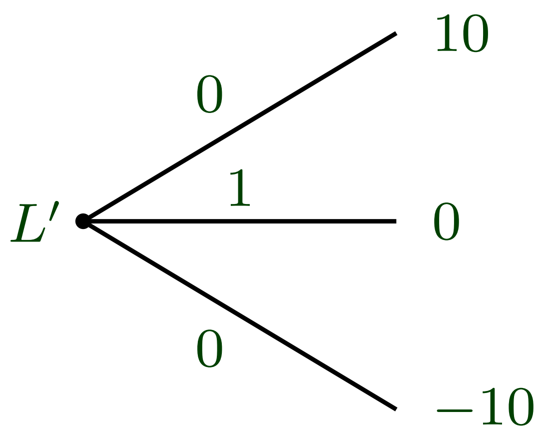
Premier critère de décision qui vient à l'esprit pour l'évaluation d'une alternative ayant des conséquences monétaires incertaines : l'espérance mathématique ou valeur actuarielle :

$$\sum_i p_i \, x_i$$

Premier critère de décision qui vient à l'esprit pour l'évaluation d'une alternative ayant des conséquences monétaires incertaines : l'espérance mathématique ou valeur actuarielle :

$$\sum_i p_i \, x_i$$





$$\mathrm{E}(L) = \frac{18}{38}\,10 - \frac{20}{38}\,10 = -\frac{20}{38} \qquad \mathrm{E}(L') = 0$$

Exemple : Assurance. Une maison d'une valeur de 1000 peut brûler (état b) avec probabilité 1/10 et ne pas brûler (état n) avec probabilité 9/10 :

$$\Omega = \{b, n\},\ \pi(b) = 1/10,\ \pi(n) = 9/10$$

Exemple : Assurance. Une maison d'une valeur de 1000 peut brûler (état b) avec probabilité 1/10 et ne pas brûler (état n) avec probabilité 9/10 :

$$\Omega = \{b, n\},\ \pi(b) = 1/10,\ \pi(n) = 9/10$$

Considérons les trois alternatives (actes) a, a' et a'' suivantes :

- Ne pas s'assurer : $a(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega = b \\ 1000 & \text{si } \omega = n \end{cases}$

Exemple : Assurance. Une maison d'une valeur de 1000 peut brûler (état b) avec probabilité 1/10 et ne pas brûler (état n) avec probabilité 9/10 :

$$\Omega = \{b, n\},\ \pi(b) = 1/10,\ \pi(n) = 9/10$$

Considérons les trois alternatives (actes) a, a' et a'' suivantes :

- Ne pas s'assurer : $a(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega = b \\ 1000 & \text{si } \omega = n \end{cases}$
- Assurance totale (prime $= 100$) : $a'(\omega) = 900$ pour tout $\omega \in \Omega$

Exemple : Assurance. Une maison d'une valeur de 1000 peut brûler (état b) avec probabilité 1/10 et ne pas brûler (état n) avec probabilité 9/10 :

$$\Omega = \{b, n\}, \ \pi(b) = 1/10, \ \pi(n) = 9/10$$

Considérons les trois alternatives (actes) a, a' et a'' suivantes :

- Ne pas s'assurer : $a(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega = b \\ 1000 & \text{si } \omega = n \end{cases}$
- Assurance totale (prime $= 100$) : $a'(\omega) = 900$ pour tout $\omega \in \Omega$
- Assurance avec franchise (prime $= 70$, franchise $= 300$) :

$$a''(\omega) = \begin{cases} 630 & \text{si } \omega = b \\ 930 & \text{si } \omega = n \end{cases}$$

Exemple : Assurance. Une maison d'une valeur de 1000 peut brûler (état b) avec probabilité 1/10 et ne pas brûler (état n) avec probabilité 9/10 :

$$\Omega = \{b, n\},\ \pi(b) = 1/10,\ \pi(n) = 9/10$$

Considérons les trois alternatives (actes) a, a' et a'' suivantes :

- Ne pas s'assurer : $a(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega = b \\ 1000 & \text{si } \omega = n \end{cases}$
- Assurance totale (prime $= 100$) : $a'(\omega) = 900$ pour tout $\omega \in \Omega$
- Assurance avec franchise (prime $= 70$, franchise $= 300$) :

$$a''(\omega) = \begin{cases} 630 & \text{si } \omega = b \\ 930 & \text{si } \omega = n \end{cases}$$

➠ Conséquences $C = \{0, 630, 900, 930, 1000\}$

Exemple : Assurance. Une maison d'une valeur de 1000 peut brûler (état b) avec probabilité 1/10 et ne pas brûler (état n) avec probabilité 9/10 :

$$\Omega = \{b, n\},\ \pi(b) = 1/10,\ \pi(n) = 9/10$$

Considérons les trois alternatives (actes) a, a' et a'' suivantes :

- Ne pas s'assurer : $a(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega = b \\ 1000 & \text{si } \omega = n \end{cases}$
- Assurance totale (prime $= 100$) : $a'(\omega) = 900$ pour tout $\omega \in \Omega$
- Assurance avec franchise (prime $= 70$, franchise $= 300$) :

$$a''(\omega) = \begin{cases} 630 & \text{si } \omega = b \\ 930 & \text{si } \omega = n \end{cases}$$

➠ Conséquences $C = \{0, 630, 900, 930, 1000\}$

Loteries induites par les actes a, a' et a'' :

$$L = \left(\frac{1}{10}, 0, 0, 0, \frac{9}{10}\right) \qquad L' = (0, 0, 1, 0, 0) \qquad L'' = \left(0, \frac{1}{10}, 0, \frac{9}{10}, 0\right)$$

Inconvénients de l'espérance mathématique :

Inconvénients de l'espérance mathématique :

– Pas de prise en compte de l'attitude vis-à-vis du risque du décideur

Inconvénients de l'espérance mathématique :

– Pas de prise en compte de l'attitude vis-à-vis du risque du décideur
– Conséquences monétaires uniquement

Inconvénients de l'espérance mathématique :

- Pas de prise en compte de l'attitude vis-à-vis du risque du décideur
- Conséquences monétaires uniquement
- Paradoxe de Saint-Pétersbourg

Inconvénients de l'espérance mathématique :

– Pas de prise en compte de l'attitude vis-à-vis du risque du décideur
– Conséquences monétaires uniquement
– Paradoxe de Saint-Pétersbourg

Paradoxe de Saint-Pétersbourg

Inconvénients de l'espérance mathématique :

– Pas de prise en compte de l'attitude vis-à-vis du risque du décideur
– Conséquences monétaires uniquement
– Paradoxe de Saint-Pétersbourg

Paradoxe de Saint-Pétersbourg

Une pièce de monnaie équilibrée est lancée à répétition tant que pile se réalise

Inconvénients de l'espérance mathématique :

- Pas de prise en compte de l'attitude vis-à-vis du risque du décideur
- Conséquences monétaires uniquement
- Paradoxe de Saint-Pétersbourg

Paradoxe de Saint-Pétersbourg

Une pièce de monnaie équilibrée est lancée à répétition tant que pile se réalise

Dès que face se réalise au k-ième jet le gain est de 2^k euros

Inconvénients de l'espérance mathématique :

– Pas de prise en compte de l'attitude vis-à-vis du risque du décideur
– Conséquences monétaires uniquement
– Paradoxe de Saint-Pétersbourg

Paradoxe de Saint-Pétersbourg

Une pièce de monnaie équilibrée est lancée à répétition tant que pile se réalise

Dès que face se réalise au k-ième jet le gain est de 2^k euros

Espérance mathématique de gain pour ce pari :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\, 2^k = 1 + 1 + 1 + \cdots = \infty$$

Inconvénients de l'espérance mathématique :

- Pas de prise en compte de l'attitude vis-à-vis du risque du décideur
- Conséquences monétaires uniquement
- Paradoxe de Saint-Pétersbourg

Paradoxe de Saint-Pétersbourg

Une pièce de monnaie équilibrée est lancée à répétition tant que pile se réalise

Dès que face se réalise au k-ième jet le gain est de 2^k euros

Espérance mathématique de gain pour ce pari :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} 2^k = 1 + 1 + 1 + \cdots = \infty$$

Pourtant la valeur attribuée à ce pari par la plupart des gens est bien en-dessous de 100 et même de 10 euros ...

En 1738 Daniel Bernoulli (1700–1782) propose d'intégrer le fait que les agents ont une utilité (satisfaction) marginale décroissante pour la monnaie et évaluent un pari par l'espérance de l'utilité des différentes conséquences

En 1738 Daniel Bernoulli (1700–1782) propose d'intégrer le fait que les agents ont une utilité (satisfaction) marginale décroissante pour la monnaie et évaluent un pari par l'espérance de l'utilité des différentes conséquences

Par exemple, l'espérance mathématique du logarithme du gain :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \ln(2^k) &= (\ln 2) \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^k = (\ln 2) \left[2 \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^k - \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^k\right] \\
&= (\ln 2) \left[\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \left(\frac{1}{2}\right)^k - \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^k\right] \\
&= (\ln 2) \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k\right] = \ln 4
\end{aligned}$$

En 1738 Daniel Bernoulli (1700–1782) propose d'intégrer le fait que les agents ont une utilité (satisfaction) marginale décroissante pour la monnaie et évaluent un pari par l'espérance de l'utilité des différentes conséquences

Par exemple, l'espérance mathématique du logarithme du gain :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \ln(2^k) = (\ln 2) \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^k = (\ln 2) \left[2 \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^k - \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^k \right]$$
$$= (\ln 2) \left[\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \left(\frac{1}{2}\right)^k - \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^k \right]$$
$$= (\ln 2) \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \right] = \ln 4$$

$\Rightarrow$ Valeur d'un montant monétaire certain de 4 euros

Critiques de la suggestion de Bernoulli :

Critiques de la suggestion de Bernoulli :

– Pourquoi $\ln$? (ad hoc, il existe une infinité de fonctions croissantes à taux décroissant)

Critiques de la suggestion de Bernoulli :

– Pourquoi $\ln$? (ad hoc, il existe une infinité de fonctions croissantes à taux décroissant)
– Pourquoi la même forme pour chaque individu ?

Critiques de la suggestion de Bernoulli :

- Pourquoi $\ln$? (ad hoc, il existe une infinité de fonctions croissantes à taux décroissant)
- Pourquoi la même forme pour chaque individu ?
- Pourquoi la décision doit-elle être basée sur la valeur espérée des utilités ?

Critiques de la suggestion de Bernoulli :

- Pourquoi $\ln$? (ad hoc, il existe une infinité de fonctions croissantes à taux décroissant)
- Pourquoi la même forme pour chaque individu ?
- Pourquoi la décision doit-elle être basée sur la valeur espérée des utilités ?
- La valeur espérée est justifiée à long terme, si le pari est répété un grand nombre de fois. Mais pourquoi peut-on l'appliquer si l'individu participe une seule fois au jeu ?

Critiques de la suggestion de Bernoulli :

- Pourquoi $\ln$? (ad hoc, il existe une infinité de fonctions croissantes à taux décroissant)
- Pourquoi la même forme pour chaque individu ?
- Pourquoi la décision doit-elle être basée sur la valeur espérée des utilités ?
- La valeur espérée est justifiée à long terme, si le pari est répété un grand nombre de fois. Mais pourquoi peut-on l'appliquer si l'individu participe une seule fois au jeu ?

1944 : von Neumann et Morgenstern fournissent une axiomatique rigoureuse généralisant la solution proposée par Bernoulli

FIG. 1 – John von Neumann (1903–1957)

Idée de la construction de vNM :

Idée de la construction de vNM :

Supposons

$$A \succ B \succ C$$

Idée de la construction de vNM :

Supposons

$$A \succ B \succ C$$

Dans un environnement certain, toutes les valeurs $a > b > c$ sont des indices appropriés pour représenter cette préférence ordinale

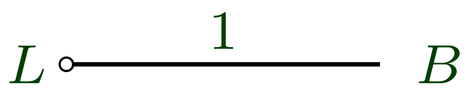
Idée de la construction de vNM :

Supposons

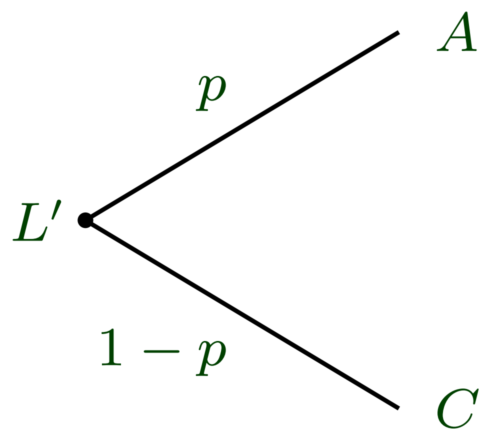
$$A \succ B \succ C$$

Dans un environnement certain, toutes les valeurs $a > b > c$ sont des indices appropriés pour représenter cette préférence ordinale

Introduisons les paris



et



et supposons $L \succeq L' \Leftrightarrow p \leq 2/3$

Alors, on se restreint aux indices d'utilité

$$a > \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}c > c$$

Alors, on se restreint aux indices d'utilité

$$a > \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}c > c$$

et on a

$$u(B) - u(C) = 2[u(A) - u(B)] = \frac{2}{3}(a - c)$$

Alors, on se restreint aux indices d'utilité

$$a > \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}c > c$$

et on a

$$u(B) - u(C) = 2[u(A) - u(B)] = \frac{2}{3}(a - c)$$

Ces différences d'utilités lors du passage d'une conséquence à une autre représentent l'attitude vis-à-vis du risque de l'individu, et non une amplitude de satisfaction

Hypothèses de von Neumann et Morgenstern :

Hypothèses de von Neumann et Morgenstern :

– Rationalité, ou préordre complet.

Hypothèses de von Neumann et Morgenstern :

- Rationalité, ou préordre complet.
  - Complétude. Pour tout L, $L' \in \mathcal{L}$, on a $L \succeq L'$ ou $L' \succeq L$ (ou les deux)

Hypothèses de von Neumann et Morgenstern :

- Rationalité, ou préordre complet.
  - Complétude. Pour tout L, $L' \in \mathcal{L}$, on a $L \succeq L'$ ou $L' \succeq L$ (ou les deux)
  - Transitivité. Pour tout L, L', $L'' \in \mathcal{L}$, si $L \succeq L'$ et $L' \succeq L''$, alors $L \succeq L''$

Hypothèses de von Neumann et Morgenstern :

- Rationalité, ou préordre complet.
  - Complétude. Pour tout L, $L' \in \mathcal{L}$, on a $L \succeq L'$ ou $L' \succeq L$ (ou les deux)
  - Transitivité. Pour tout L, L', $L'' \in \mathcal{L}$, si $L \succeq L'$ et $L' \succeq L''$, alors $L \succeq L''$

- Continuité. Pour tout L, L', $L'' \in \mathcal{L}$, les ensembles

$$\{\alpha \in [0,1] : \alpha L + (1-\alpha)L' \succeq L''\}$$

$$\text{et } \{\alpha \in [0,1] : L'' \succeq \alpha L + (1-\alpha)L'\}$$

sont fermés. ($L \succeq L' \succeq L'' \Rightarrow \exists\, \alpha \in [0,1],\ \alpha L + (1-\alpha)L'' \sim L'$)

Hypothèses de von Neumann et Morgenstern :

- Rationalité, ou préordre complet.
  - Complétude. Pour tout L, $L' \in \mathcal{L}$, on a $L \succeq L'$ ou $L' \succeq L$ (ou les deux)
  - Transitivité. Pour tout L, L', $L'' \in \mathcal{L}$, si $L \succeq L'$ et $L' \succeq L''$, alors $L \succeq L''$
- Continuité. Pour tout L, L', $L'' \in \mathcal{L}$, les ensembles

$$\{\alpha \in [0,1] : \alpha L + (1-\alpha)L' \succeq L''\}$$

$$\text{et } \{\alpha \in [0,1] : L'' \succeq \alpha L + (1-\alpha)L'\}$$

  sont fermés. ($L \succeq L' \succeq L'' \Rightarrow \exists\, \alpha \in [0,1],\ \alpha L + (1-\alpha)L'' \sim L'$)

- Axiome d'indépendance. Pour tout L, L', $L'' \in \mathcal{L}$ et $\alpha \in (0,1)$ on a

$$L \succeq L' \Leftrightarrow \alpha L + (1-\alpha)L'' \succeq \alpha L' + (1-\alpha)L''$$

Théorème de von Neumann et Morgenstern.

Théorème de von Neumann et Morgenstern.

Si la relation de préférence $\succeq$ sur l'espace des loteries $\mathcal{L}$ est rationnelle, continue, et vérifie l'axiome d'indépendance, alors elle admet une représentation sous la forme d'utilité espérée de VNM

Théorème de von Neumann et Morgenstern.

Si la relation de préférence $\succeq$ sur l'espace des loteries $\mathcal{L}$ est rationnelle, continue, et vérifie l'axiome d'indépendance, alors elle admet une représentation sous la forme d'utilité espérée de VNM

Autrement dit, on peut assigner des valeurs $u(c)$ aux différentes conséquences $c \in C$ de sorte que pour toutes loteries $L = (p_1, \ldots, p_C)$ et $L' = (p'_1, \ldots, p'_C)$ on a

$$L \succeq L' \Leftrightarrow \underbrace{\sum_{c \in C} p_c \, u(c)}_{U(L)} \geq \underbrace{\sum_{c \in C} p'_c \, u(c)}_{U(L')}$$

Théorème de von Neumann et Morgenstern.

Si la relation de préférence $\succeq$ sur l'espace des loteries $\mathcal{L}$ est rationnelle, continue, et vérifie l'axiome d'indépendance, alors elle admet une représentation sous la forme d'utilité espérée de VNM

Autrement dit, on peut assigner des valeurs $u(c)$ aux différentes conséquences $c \in C$ de sorte que pour toutes loteries $L = (p_1, \ldots, p_C)$ et $L' = (p'_1, \ldots, p'_C)$ on a

$$L \succeq L' \Leftrightarrow \underbrace{\sum_{c \in C} p_c \, u(c)}_{U(L)} \geq \underbrace{\sum_{c \in C} p'_c \, u(c)}_{U(L')}$$

Propriété. Une fonction d'utilité $U : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ a la forme d'utilité espérée de VNM si et seulement si elle est linéaire par rapport aux probabilités, c'est-à-dire

Théorème de von Neumann et Morgenstern.

Si la relation de préférence $\succeq$ sur l'espace des loteries $\mathcal{L}$ est rationnelle, continue, et vérifie l'axiome d'indépendance, alors elle admet une représentation sous la forme d'utilité espérée de VNM

Autrement dit, on peut assigner des valeurs $u(c)$ aux différentes conséquences $c \in C$ de sorte que pour toutes loteries $L = (p_1, \ldots, p_C)$ et $L' = (p'_1, \ldots, p'_C)$ on a

$$L \succeq L' \Leftrightarrow \underbrace{\sum_{c \in C} p_c \, u(c)}_{U(L)} \geq \underbrace{\sum_{c \in C} p'_c \, u(c)}_{U(L')}$$

Propriété. Une fonction d'utilité $U : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ a la forme d'utilité espérée de VNM si et seulement si elle est linéaire par rapport aux probabilités, c'est-à-dire

$$U\left(\sum_{k=1}^{K} \alpha_k \, L_k\right) = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k \, U(L_k),$$

pour toutes loteries $(L_k)_k$ et probabilités $(\alpha_k)_k$, avec $\sum_{k=1}^{K} \alpha_k = 1$

Propriété. (Cardinalité) Soit $U : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ une fonction d'utilité espérée de VNM pour la relation de préférence $\succeq$ sur $\mathcal{L}$. La fonction $\widetilde{U} : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ est une autre fonction d'utilité espérée de VNM pour $\succeq$ si et seulement si il existe $\beta > 0$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$\widetilde{U}(L) = \beta U(L) + \gamma$$

pour tout $L \in \mathcal{L}$.

Propriété. (Cardinalité) Soit $U : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ une fonction d'utilité espérée de VNM pour la relation de préférence $\succeq$ sur $\mathcal{L}$. La fonction $\widetilde{U} : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ est une autre fonction d'utilité espérée de VNM pour $\succeq$ si et seulement si il existe $\beta > 0$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$\widetilde{U}(L) = \beta U(L) + \gamma$$

pour tout $L \in \mathcal{L}$.

Conséquences monétaires : Loterie $=$ variable aléatoire représentée par une fonction de répartition F

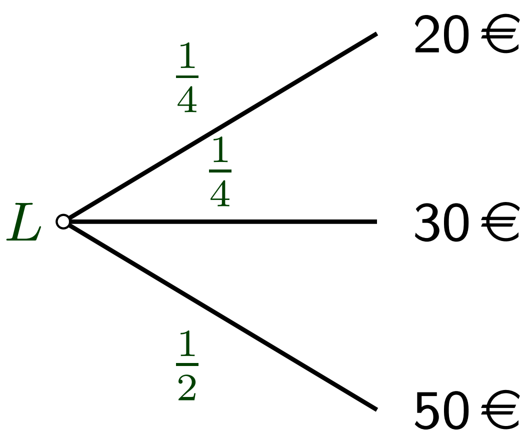
Propriété. (Cardinalité) Soit $U : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ une fonction d'utilité espérée de VNM pour la relation de préférence $\succeq$ sur $\mathcal{L}$. La fonction $\widetilde{U} : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ est une autre fonction d'utilité espérée de VNM pour $\succeq$ si et seulement si il existe $\beta > 0$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$\widetilde{U}(L) = \beta U(L) + \gamma$$

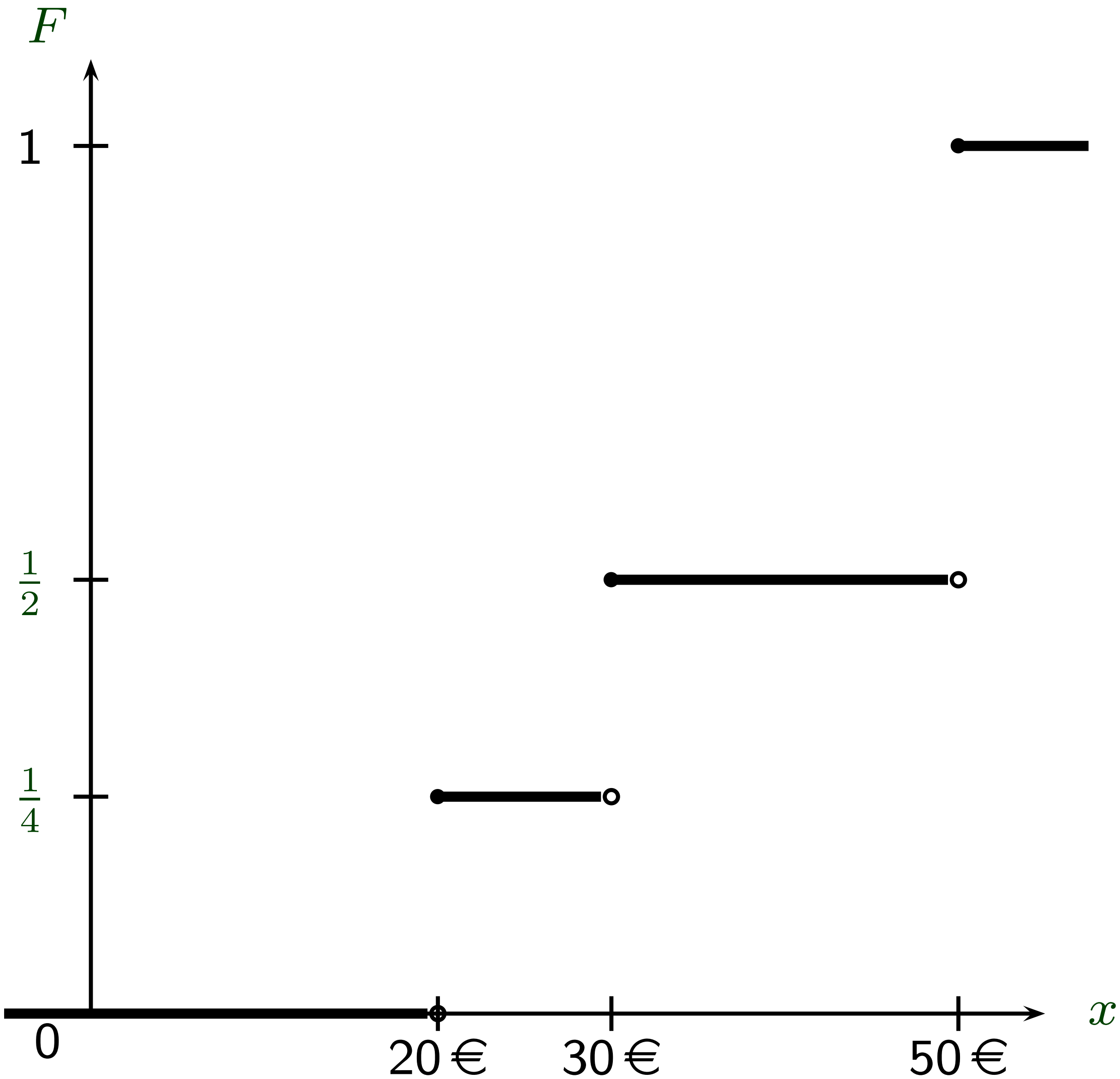
pour tout $L \in \mathcal{L}$.

Conséquences monétaires : Loterie $=$ variable aléatoire représentée par une fonction de répartition F

Par exemple, la loterie à trois conséquences monétaires possibles suivante



a la fonction de répartition
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 20 \\ 1/4 & \text{si } x \in [20, 30) \\ 1/2 & \text{si } x \in [30, 50) \\ 1 & \text{si } x \geq 50 \end{cases}$$



F
1
$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}$
0
20 €
30 €
50 €
x

Dans ce cadre une loterie (fonction de répartition) F est évaluée par l'agent à l'aide d'une fonction d'utilité espérée de VNM ayant la forme

$$\begin{aligned} U(F) &= \int_C u(c)\, dF(c) \\ &= \int_C u(c) f(c)\, dc \quad \text{si la densité } f \text{ existe} \end{aligned}$$

Dans ce cadre une loterie (fonction de répartition) F est évaluée par l'agent à l'aide d'une fonction d'utilité espérée de VNM ayant la forme

$$\begin{aligned} U(F) &= \int_C u(c)\, dF(c) \\ &= \int_C u(c) f(c)\, dc \quad \text{si la densité } f \text{ existe} \end{aligned}$$

Remarques.

- Distinguer la fonction d'utilité espérée $U : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ définie sur l'ensemble des loteries, de la fonction $u : C \to \mathbb{R}$ définie sur des conséquences certaines (parfois appelée fonction d'utilité de Bernoulli)

Dans ce cadre une loterie (fonction de répartition) F est évaluée par l'agent à l'aide d'une fonction d'utilité espérée de VNM ayant la forme

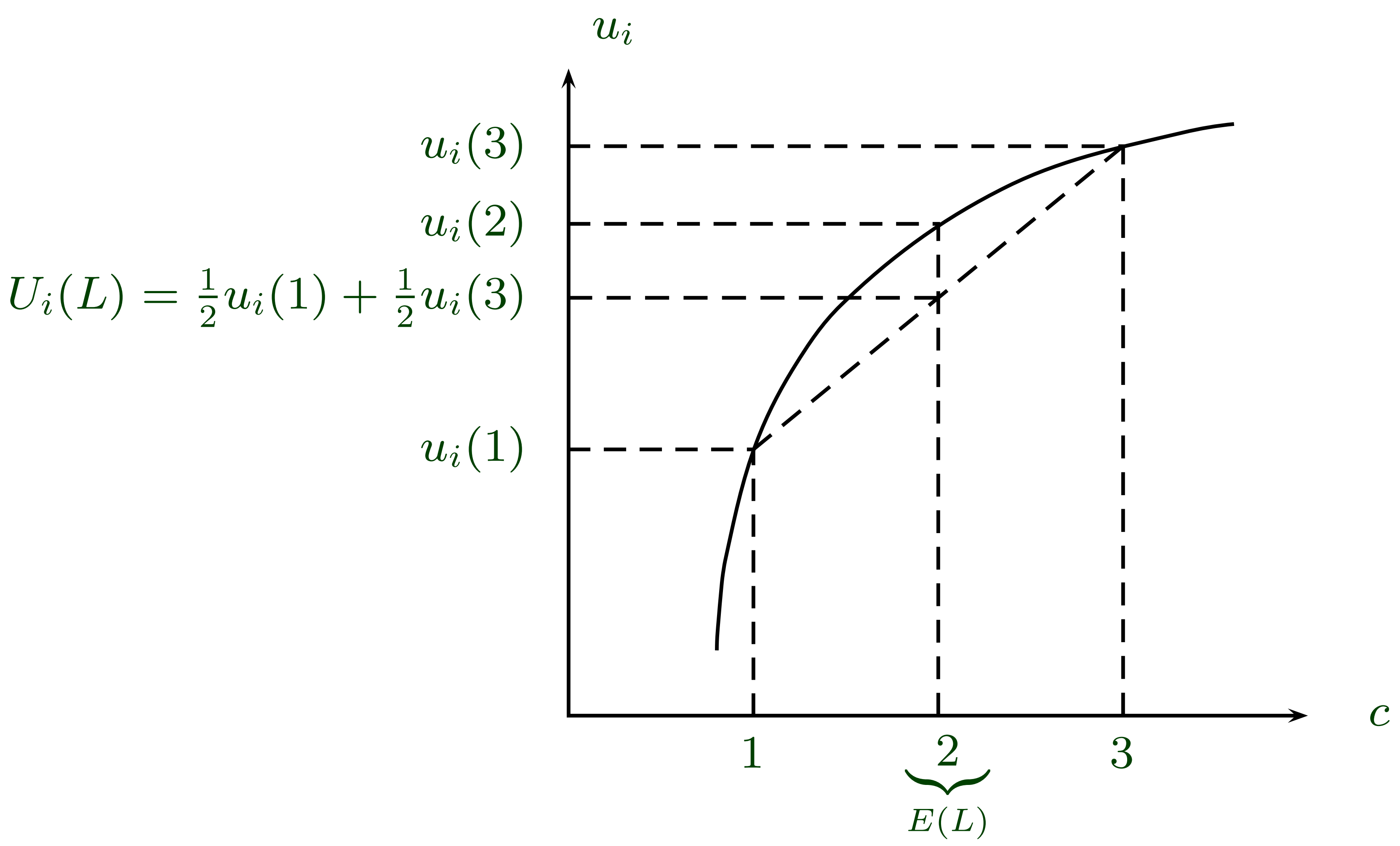
$$\begin{aligned} U(F) &= \int_C u(c)\, dF(c) \\ &= \int_C u(c) f(c)\, dc \quad \text{si la densité } f \text{ existe} \end{aligned}$$

Remarques.

- Distinguer la fonction d'utilité espérée $U : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ définie sur l'ensemble des loteries, de la fonction $u : C \to \mathbb{R}$ définie sur des conséquences certaines (parfois appelée fonction d'utilité de Bernoulli)

- L'axiomatique de VNM n'impose aucune restriction sur la forme de la fonction u, mais on suppose en générale que u est croissante

Exemple de fonction d'utilité dans l'espace des conséquences monétaires :



$$L = (1/2, 1\,;\, 1/2, 3)$$

Approximation et critère moyenne/variance

Loterie (variable aléatoire) $\tilde{x}$

Approximation et critère moyenne/variance

Loterie (variable aléatoire) $\tilde{x}$

Approximation de Taylor de la fonction d'utilité (de Bernoulli) u au voisinage de $\overline{x} = E(\tilde{x})$:

$$u(x) = u(\overline{x}) + \frac{u'(\overline{x})}{1!}(x - \overline{x}) + \frac{u''(\overline{x})}{2!}(x - \overline{x})^2 + \frac{u'''(\overline{x})}{3!}(x - \overline{x})^3 + \cdots$$

$$\Rightarrow \; U(\tilde{x}) = E[u(\tilde{x})] =$$

$$= u(\overline{x}) + \frac{u''(\overline{x})}{2!}\underbrace{E[(\tilde{x} - \overline{x})^2]}_{\sigma_x^2} + \frac{u'''(\overline{x})}{3!}E[(\tilde{x} - \overline{x})^3] + \cdots$$

Approximation et critère moyenne/variance

Loterie (variable aléatoire) $\tilde{x}$

Approximation de Taylor de la fonction d'utilité (de Bernoulli) u au voisinage de $\overline{x} = E(\tilde{x})$:

$$u(x) = u(\overline{x}) + \frac{u'(\overline{x})}{1!}(x - \overline{x}) + \frac{u''(\overline{x})}{2!}(x - \overline{x})^2 + \frac{u'''(\overline{x})}{3!}(x - \overline{x})^3 + \cdots$$

$$\Rightarrow \; U(\tilde{x}) = E[u(\tilde{x})] =$$

$$= u(\overline{x}) + \frac{u''(\overline{x})}{2!} \underbrace{E[(\tilde{x} - \overline{x})^2]}_{\sigma_x^2} + \frac{u'''(\overline{x})}{3!} E[(\tilde{x} - \overline{x})^3] + \cdots$$

$\Rightarrow$ l'utilité espérée d'une loterie peut incorporer tous les moments de la distribution

Exemples.

Exemples.

- Fonction d'utilité linéaire $u(x) = x \Rightarrow$ critère d'espérance mathématique

$U(\tilde{x}) = \overline{x}$

Exemples.

- Fonction d'utilité linéaire $u(x) = x \Rightarrow$ critère d'espérance mathématique $U(\tilde{x}) = \overline{x}$

- Fonction d'utilité quadratique $u(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 \Rightarrow$ critère moyenne/variance (Markowitz, 1952)

$$U(\tilde{x}) = \alpha + \beta\overline{x} + \gamma(\overline{x}^2 + \sigma_x^2)$$

Probabilités objectives / subjectives

Probabilités objectives / subjectives

Knight (1921) : "Risk, uncertainty and profit"

Probabilités objectives / subjectives

Knight (1921) : "Risk, uncertainty and profit"

– **Risque** : il existe des probabilités objectives (lancé de dés, d'une pièce de monnaie, tirage d'un numéro sur une roulette ou dans une urne, ...)

Probabilités objectives / subjectives

Knight (1921) : "Risk, uncertainty and profit"

- **Risque** : il existe des probabilités objectives (lancé de dés, d'une pièce de monnaie, tirage d'un numéro sur une roulette ou dans une urne, . . .)
- **Incertain** : pas de probabilités objectives (résultats d'un match de football ou d'une course de chevaux, évolution d'un prix, occurrence d'une catastrophe naturelle, . . .)

Probabilités objectives / subjectives

Knight (1921) : “Risk, uncertainty and profit”

- **Risque** : il existe des probabilités objectives (lancé de dés, d’une pièce de monnaie, tirage d’un numéro sur une roulette ou dans une urne, . . .)
- **Incertain** : pas de probabilités objectives (résultats d’un match de football ou d’une course de chevaux, évolution d’un prix, occurrence d’une catastrophe naturelle, . . .)

Von Neumann et Morgenstern (1944) : hypothèse implicite que la situation peut toujours être représentée par des **probabilités objectives** parfaitement définies et connues sans ambiguïté par le preneur de décision ($\rightarrow$ risque)

Probabilités objectives / subjectives

Knight (1921) : “Risk, uncertainty and profit”

– **Risque** : il existe des probabilités objectives (lancé de dés, d’une pièce de monnaie, tirage d’un numéro sur une roulette ou dans une urne, . . .)

– **Incertain** : pas de probabilités objectives (résultats d’un match de football ou d’une course de chevaux, évolution d’un prix, occurrence d’une catastrophe naturelle, . . .)

Von Neumann et Morgenstern (1944) : hypothèse implicite que la situation peut toujours être représentée par des **probabilités objectives** parfaitement définies et connues sans ambiguïté par le preneur de décision ($\rightarrow$ risque)

Savage (1954) et Anscombe et Aumann (1963) : généralisation de la forme d’utilité espérée sans probabilité objective (construction de **probabilités subjectives / croyances** uniques)

➥ **Théorie de l'utilité espérée subjective** : (sous certaines conditions) les individus se comportent comme s'ils maximisaient une fonction d'utilité espérée basée sur des croyances probabilistes sur les différents états du monde possibles et sur des utilités (de Bernoulli) sur les différentes conséquences possibles

➥ **Théorie de l'utilité espérée subjective** : (sous certaines conditions) les individus se comportent comme s'ils maximisaient une fonction d'utilité espérée basée sur des croyances probabilistes sur les différents états du monde possibles et sur des utilités (de Bernoulli) sur les différentes conséquences possibles

$\Rightarrow$ les goûts et les croyances sont subjectifs

Aversion pour le risque

Aversion pour le risque

- Un agent a de l'aversion pour le risque si

$$\delta_{E(F)} \succeq F \quad \forall\, F \in \mathcal{L}$$

Aversion pour le risque

- Un agent a de l'aversion pour le risque si

$$\delta_{E(F)} \succeq F \quad \forall\, F \in \mathcal{L}$$

- Un agent a de l'aversion stricte pour le risque si

$$\delta_{E(F)} \succ F \quad \forall\, F \in \mathcal{L},\ F \neq \delta_{E(F)}$$

Aversion pour le risque

- Un agent a de l'aversion pour le risque si

$$\delta_{E(F)} \succeq F \quad \forall\, F \in \mathcal{L}$$

- Un agent a de l'aversion stricte pour le risque si

$$\delta_{E(F)} \succ F \quad \forall\, F \in \mathcal{L},\; F \neq \delta_{E(F)}$$

- Un agent est neutre au risque si

$$\delta_{E(F)} \sim F \quad \forall\, F \in \mathcal{L}$$

Si la relation de préférence $\succeq$ peut être représentée par une fonction d'utilité espérée, alors l'agent a de l'aversion pour le risque si pour tout loterie F

$$u[E(F)] \equiv u\left(\int c\, dF(c)\right) \geq \int u(c)\, dF(c) \equiv U(F)$$

Si la relation de préférence $\succeq$ peut être représentée par une fonction d'utilité espérée, alors l'agent a de l'aversion pour le risque si pour tout loterie F

$$u[E(F)] \equiv u\left(\int c\,dF(c)\right) \geq \int u(c)\,dF(c) \equiv U(F)$$

(inégalité de Jensen qui caractérise les fonctions d'utilité concaves)

Si la relation de préférence $\succeq$ peut être représentée par une fonction d'utilité espérée, alors l'agent a de l'aversion pour le risque si pour tout loterie F

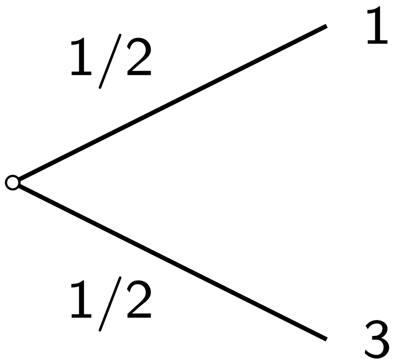
$$u[E(F)] \equiv u\left(\int c\, dF(c)\right) \geq \int u(c)\, dF(c) \equiv U(F)$$

(inégalité de Jensen qui caractérise les fonctions d'utilité concaves)

$\Rightarrow$ Un agent a de l'aversion (stricte) pour le risque si et seulement si sa fonction d'utilité u est (strictement) concave. Un agent est neutre au risque si et seulement si sa fonction d'utilité u est linéaire

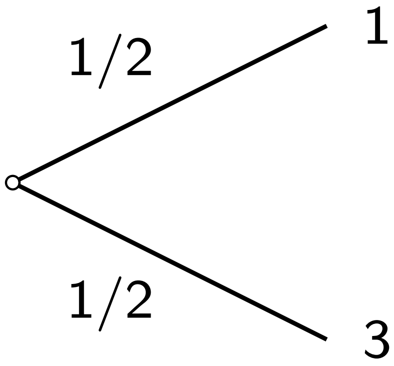
Exemple :

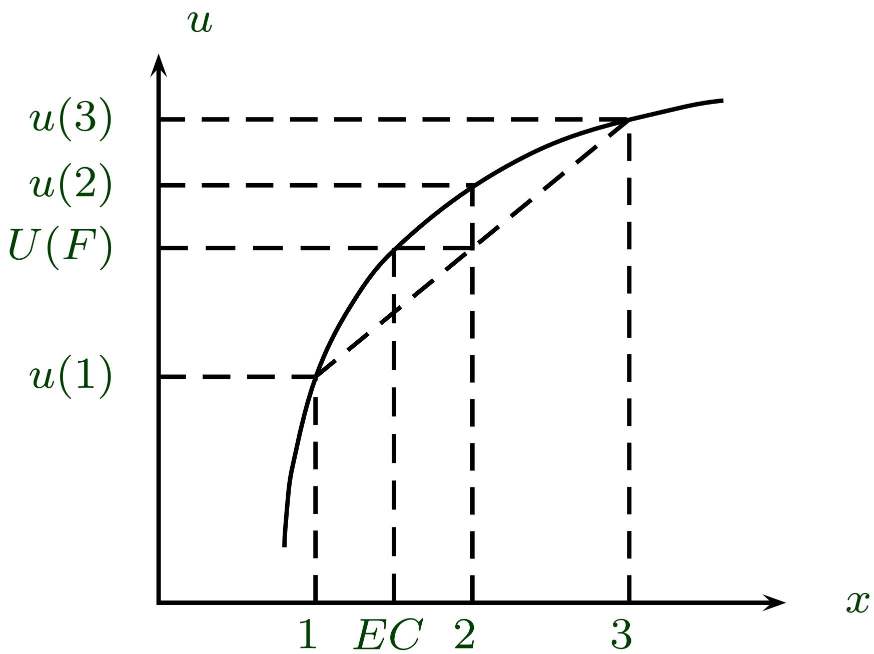
$$F = (\tfrac{1}{2}, 1; \tfrac{1}{2}, 3) =$$



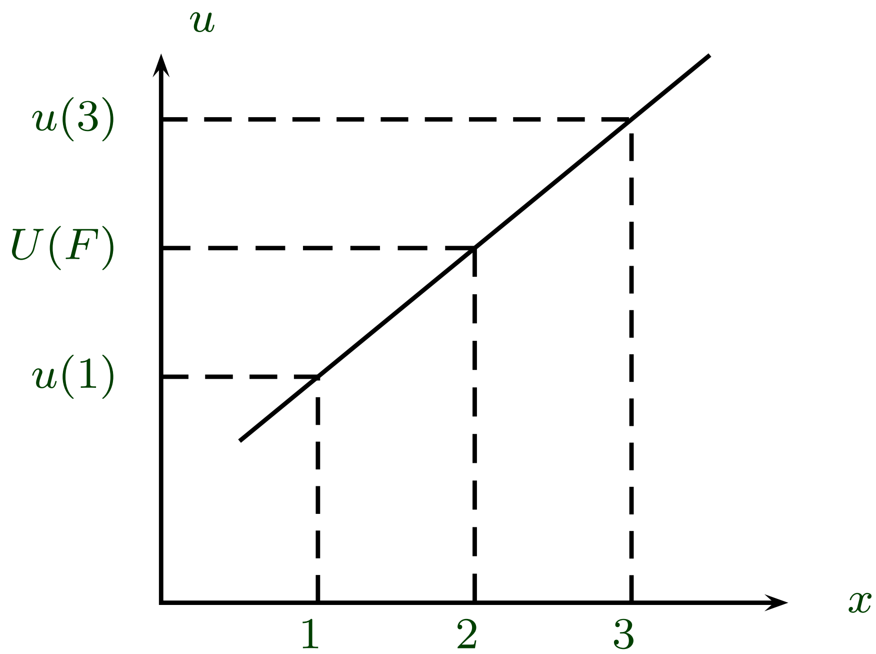
Exemple :

$$F = (\tfrac{1}{2}, 1; \tfrac{1}{2}, 3) =$$





(a) Aversion au risque



(b) Neutralité vis-à-vis du risque

Équivalent certain :

Équivalent certain :

$$u[EC(F,u)] \equiv U(F)$$

Équivalent certain :

$$u[EC(F,u)] \equiv U(F)$$

Prime de risque :

$$\Pi(F,u) \equiv E(F) - EC(F,u)$$

Par définition, la prime de risque est positive si l'agent a de l'aversion pour le risque

Pour en savoir plus :

– Gollier (2001) : "The Economics of Risk and Time", Chapitres 1, 2, 3 et 27
– Fishburn (1994) : "Utility and Subjective Probability", dans "Handbook of Game Theory" Vol. 2, Chap. 39
– Karni et Schmeidler (1991) : "Utility Theory with Uncertainty", dans "Handbook of Mathematical Economics" Vol. 4
– Kreps (1988) : "Notes on the Theory of Choice"
– Kreps (1996) : "Leçons de théorie microéconomique", Section 2.1 et Chapitre 3
– Mas-Colell et al. (1995) : "Microeconomic Theory", Sections 1.A, 1.B, 3.C, et Chapitre 6
– Myerson (1991) : "Game Theory", Chapitre 1

Références

Anscombe, F. J. et R. J. Aumann (1963) : “A Definition of Subjective Probability,” Ann. Math. Statist., 34, 199–205.

Aumann, R. J. (1959) : “Acceptable Points in General Cooperative n-Person Games,” dans Contributions to the Theory of Games IV, ed. par H. W. Kuhn et R. D. Luce, Princeton : Princeton Univ. Press., 287–324.

——— (1974) : “Subjectivity and Correlation in Randomized Strategies,” Journal of Mathematical Economics, 1, 67–96.

——— (1976) : “Agreeing to Disagree,” The Annals of Statistics, 4, 1236–1239.

——— (1987) : “Correlated Equilibrium as an Expression of Bayesian Rationality,” Econometrica, 55, 1–18.

Aumann, R. J. et M. Maschler (1966) : “Game Theoretic Aspects of Gradual Disarmament,” Report of the U.S. Arms Control and Disarmament Agency, ST-80, Chapter V, pp. 1–55.

——— (1967) : “Repeated Games with Incomplete Information : A Survey of Recent Results,” Report of the U.S. Arms Control and Disarmament Agency, ST-116, Chapter III, pp. 287–403.

Aumann, R. J., M. Maschler, et R. Stearns (1968) : “Repeated Games with Incomplete Information : An Approach to the Nonzero Sum Case,” Report of the U.S. Arms Control and Disarmament Agency, ST-143, Chapter IV, pp. 117–216.

Borel, E. (1921) : “La Théorie des Jeux et les Équations Intégrales à Noyau Symétriques,” Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 173, 1304–1308.

Camerer, C. F. (2003) : Behavioral Game Theory : Experiments in Strategic Interaction, Princeton : Princeton University Press.

Cavagnac, M. (2006) : Théorie des jeux, Mémentos LMD, Paris : Gualino éditeur.

Cournot, A. (1838) : Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses, Paris : Hachette.

Darwin, C. (1871) : The Descent of Man, and Selection in Relation to Sex, London : John Murray.

Demange, G. et J.-P. Ponssard (1994) : Théorie des jeux et analyse économique, Presses Universitaires de France.

Dixit, A. K. et B. J. Nalebuff (1991) : Thinking Strategically, New York, London : W. W. Norton & Company.

Edgeworth, F. Y. (1881) : Mathematical Psychics : An Essay on the Application of Mathematics to the Moral Sciences, London : Kegan Paul.

Fishburn, P. C. (1994) : "Utility and Subjective Probability," dans Handbook of Game Theory, ed. par R. J. Aumann et S. Hart, Elsevier Science B. V., vol. 2, chap. 39.

Gibbons, R. (1992) : Game Theory for Applied Economists, Princeton : Princeton University Press.

Gollier, C. (2001) : The Economics of Risk and Time, MIT Press.

Harsanyi, J. C. (1967–1968) : "Games with Incomplete Information Played by Bayesian Players. Parts I, II, III," Management Science, 14, 159–182, 320–334, 486–502.

Karni, E. et D. Schmeidler (1991) : "Utility Theory with Uncertainty," dans Handbook of Mathematical Economics, ed. par W. Hildenbrand et H. Sonnenschein, Elsevier, vol. 4, chap. 33.

Knight, F. H. (1921) : Risk, uncertainty and profit, Boston : Houghton Mifflin.

KREPS, D. M. (1988) : Notes on the Theory of Choice, Westview Press.

——— (1996) : Leçons de théorie microéconomique, PUF.

——— (1999) : Théorie des jeux et modélisation économique, Paris : DUNOD.

KREPS, D. M. ET R. WILSON (1982) : “Sequential Equilibria,” Econometrica, 50, 863–894.

LEWIS, D. (1969) : Convention, a Philosophical Study, Harvard University Press, Cambridge, Mass.

MARKOWITZ, H. (1952) : “Portofolio Selection,” Journal of Finance, 7, 77–91.

MAS-COLELL, A., M. D. WHINSTON, ET J. R. GREEN (1995) : Microeconomic Theory, New York : Oxford University Press.

MÉRÖ, L. (2000) : Les aléas de la raison, Science ouverte, Seuil.

MYERSON, R. B. (1991) : Game Theory, Analysis of Conflict, Harvard University Press.

NALEBUFF, B. J. ET A. M. BRANDENBURGER (1996) : Co-opetition, London : HarperCollinsBusiness.

NASAR, S. (2001) : A Beautiful Mind : The Life of Mathematical Genius and Nobel Laureate John Nash, Simon & Schuster.

NASH, J. F. (1950a) : “The Bargaining Problem,” Econometrica, 18, 155–162.

——— (1950b) : “Equilibrium Points in n-Person Games,” Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 36, 48–49.

——— (1951) : “Noncooperative Games,” Ann. Math., 54, 289–295.

——— (1953) : “Two Person Cooperative Games,” Econometrica, 21, 128–140.

Osborne, M. J. (2004) : An Introduction to Game Theory, New York, Oxford : Oxford University Press.

Osborne, M. J. et A. Rubinstein (1994) : A Course in Game Theory, Cambridge, Massachusetts : MIT Press.

Poundstone, W. (2003) : Le dilemme du prisonnier : von neumann, la théorie des jeux et la bombe, Paris : Cassini.

Savage (1954) : The Foundations of Statistics, Cambridge : Cambridge Univ. Press.

Selten, R. (1965) : “Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfrageträgheit,” Zeitschrift für dis gesamte Staatswissenschaft, 121, 301–324 and 667–689.

——— (1975) : “Reexamination of the Perfectness Concept for Equilibrium Points in Extensive Games,” International Journal of Game Theory, 4, 25–55.

Shapley, L. S. (1953) : “A Value for n-Person Games,” dans Contributions to the Theory of Games, ed. par H. W. Kuhn et A. W. Tucker, Princeton : Princeton University Press, vol. 2, 307–317.

Stearns, R. (1967) : “A Formal Information Concept for Games with Incomplete Information,” Report of the U.S. Arms Control and Disarmament Agency, ST-116, Chapter IV, pp. 405–433.

Umbhauer, G. (2002) : Théorie des jeux appliquée à la gestion, Éditions EMS, Management & société.

——— (2004) : Théorie des jeux, Vuibert, Dyna’Sup économie.

von Neumann, J. (1928) : “Zur Theories der Gesellschaftsspiele,” Math. Ann., 100, 295–320.

von Neumann, J. et O. Morgenstern (1944) : Theory of Games and Economic Behavior, Princeton, NJ : Princeton University Press.

YILDIZOGLU, M. (2003) : Introduction à la théorie des jeux, Éco Sup, Dunod.

ZERMELO, E. (1913) : "Uber eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels," dans Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians, ed. par E. W. Hobson et A. E. H. Love, Cambridge : Cambridge University Press, 501–504.