Jeux sous forme normale

(Jeux statiques à information complète)

Plan du chapitre

(2 septembre 2007)

1/
- Définitions et exemples
- Équilibre de Nash
- Applications
- Existence d'un équilibre de Nash en stratégies pures
- Extension mixte d'un jeu et stratégies mixtes
- Stratégie maximin et jeux à somme nulle
- Élimination itérative des stratégies dominées

Définition. Un **jeu sous forme normale** ou **stratégique** est la donnée de 3 éléments :

- $N = \{1, \ldots, n\}$, l'ensemble des **joueurs**
- S_i, l'ensemble non vide des **actions** ou **stratégies pures** du joueur i
- $u_i : \underbrace{S_1 \times \cdots \times S_n}_{S} \to \mathbb{R}$, la **fonction d'utilité**, de **gain** ou de **paiement** du joueur i

2/ ☞ L'utilité du joueur i dépend à la fois de son action et de l'action des **autres** (ses préférences sont définies sur S et non sur S_i)

Profil de stratégies, *résultat* ou *issue* :

$$s = (s_1, \ldots, s_n) \in S = S_1 \times \cdots \times S_n$$

Exemple : Duopole de Cournot

Firme $i = 1, 2$ produit $s_i \in [0,1]$ avec coût fixe nul et coût marginal constant $\lambda_i > 0$

Demande inverse linéaire : $p(s_1 + s_2) = a - b\,(s_1 + s_2)$, où $a > \lambda_i$, $b > 0$

Profit de chaque firme i :

3/

$$\begin{aligned} p(s_1 + s_2)\, s_i - \lambda_i\, s_i &= s_i(a - b(s_1 + s_2) - \lambda_i) \\ &= b\, s_i((a/b) - (s_1 + s_2) - (\lambda_i/b)) \\ &= b\, s_i(-\theta_i - s_1 - s_2) \end{aligned}$$

où $\theta_i = \frac{\lambda_i - a}{b} < 0$

Neutralité au risque + cardinalité $\Rightarrow$ utilité peut être définie par

$$u_i(s_1, s_2) = s_i(-\theta_i - s_1 - s_2)$$

La forme normale est donc déterminée : $N = \{1, 2\}$, $S_1 = S_2 = [0,1]$, u_1 et u_2

Un jeu sous forme normale $\langle N,\, (S_i)_{i\in N},\, (u_i)_{i\in N}\rangle$ est *fini* si l'ensemble des joueurs et l'ensemble des actions de chaque joueur sont finis (le duopole de Cournot n'est pas fini)

Représentation d'un jeu fini à deux joueurs :

	$\cdots$	s_2	$\cdots$
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
s_1	$\vdots$	$u_1(s_1, s_2); u_2(s_1, s_2)$	$\vdots$
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

4/

Trois joueurs (2 actions / joueur) :

	s_2	s_2'
s_1	$u(s_1, s_2, s_3)$	$u(s_1, s_2', s_3)$
s_1'	$u(s_1', s_2, s_3)$	$u(s_1', s_2', s_3)$

s_3

	s_2	s_2'
s_1	$u(s_1, s_2, s_3')$	$u(s_1, s_2', s_3')$
s_1'	$u(s_1', s_2, s_3')$	$u(s_1', s_2', s_3')$

s_3'

où $u(\cdot) = (u_1(\cdot),\, u_2(\cdot),\, u_3(\cdot))$

Dilemme des prisonniers.

$N = \{1, 2\}, \quad S_1 = \{D, C\}, \quad S_2 = \{D, C\}$

$S = \{(D, D), (D, C), (C, D), (C, C)\}$

	D	C
D	$(1, 1)$	$(3, 0)$
C	$(0, 3)$	$(2, 2)$

5/ Chaque joueur gagne à faire défection **quelle que soit l'action de l'autre joueur**

➥ Dilemme rationalité individuelle/collective

Remarque. Sous-entendus du modèle :
– Les décisions des joueurs sont *indépendantes*
– Les deux joueurs *connaissent* le jeu et jouent *une seule fois*

✍ Reprendre le duopole de Cournot avec $\lambda_1 = \lambda_2 = b = 1$ et $a = 4$ en supposant que chaque firme i a uniquement le choix entre la quantité $s_i = 1$ (produire beaucoup) et la quantité $s_i = 3/4$ (produire peu)

Montrer que ce jeu est équivalent au jeu du dilemme des prisonniers de la figure ci-dessous

6/

	Produire beaucoup	Produire peu
Produire beaucoup	$(10\,000,\ 10\,000)$	$(12\,500,\ \ 9\,375)$
Produire peu	$(\ 9\,375,\ 12\,500)$	$(11\,250,\ 11\,250)$

✍ Variante du dilemme des prisonniers, avec des joueurs asymétriques, où la coopération est dominante pour un des joueurs $\boxed{\text{pdf}}$

L'action s_i du joueur i *domine faiblement* l'action s_i' du joueur i si

$$\begin{array}{lll} \forall\, s_{-i} \in S_{-i}, \quad u_i(s_i, s_{-i}) & \geq & u_i(s_i', s_{-i}) \\ \exists\, s_{-i} \in S_{-i}, \quad u_i(s_i, s_{-i}) & > & u_i(s_i', s_{-i}) \end{array}$$

L'action s_i *domine strictement* l'action s_i' si

$$\forall\, s_{-i} \in S_{-i}, \quad u_i(s_i, s_{-i}) \quad > \quad u_i(s_i', s_{-i})$$

7/ Une action est *strictement/faiblement dominante* si elle domine strictement/faiblement toutes les autres actions

Exemple. Dans le jeu suivant H domine faiblement M, M domine faiblement B et H domine strictement B. Aucun ordre de dominance ne peut être établi pour le joueur 2

	G	D
H	$(2,0)$	$(1,0)$
M	$(2,2)$	$(0,0)$
B	$(1,0)$	$(0,2)$

☞ Mais insuffisant en général

Un jeu de coordination.

	a	b
a	$(2,2)$	$(0,0)$
b	$(0,0)$	$(1,1)$

8/ **Bataille des sexes.**

	a	b
a	$(3,2)$	$(1,1)$
b	$(0,0)$	$(2,3)$

Jeu de la poule mouillée. (la fureur de vivre) image

	a	b
a	$(2,2)$	$(1,3)$
b	$(3,1)$	$(0,0)$

La chasse au cerf.

9/

	a	b
a	$(3,3)$	$(0,2)$
b	$(2,0)$	$(1,1)$

Jeux à somme nulle (compétition stricte)

Cache bouton. ("*matching pennies*")

	G	D
G	$(-1,1)$	$(1,-1)$
D	$(1,-1)$	$(-1,1)$

10/

Feuille, Pierre, Ciseaux.

	F	P	C
F	$(0,0)$	$(1,-1)$	$(-1,1)$
P	$(-1,1)$	$(0,0)$	$(1,-1)$
C	$(1,-1)$	$(-1,1)$	$(0,0)$

Équilibre de Nash

11/

FIG. 1 – John F. Nash Jr (1928–)

Concept de stabilité : situation où aucun joueur n'a intérêt à dévier *unilatéralement* (individuellement) de sa stratégie

Définition. Un *équilibre de Nash en stratégies pures* d'un jeu sous forme normale

$$\langle N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N} \rangle$$

est un profil d'actions $s^* = (s_1^*, \dots, s_n^*) \in S$ tel que l'action de chaque joueur est une *meilleure réponse* aux actions choisies par les autres joueurs, c'est-à-dire

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*), \quad \forall\, s_i \in S_i,\ \forall\, i \in N$$

12/

Si de plus chaque joueur i préfère strictement jouer l'action s_i^*, c'est-à-dire

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) > u_i(s_i, s_{-i}^*), \quad \forall\, s_i \neq s_i^*,\ \forall\, i \in N$$

alors s^* est un *équilibre de Nash strict*

☞ Situation où les joueurs anticipent correctement les stratégies des autres et se comportent rationnement étant donné leurs anticipations

– *Anticipations auto-réalisatrices*
– *Conventions*

Proposition.

13/
➢ Si l'action s_i est strictement dominée alors s_i n'est jamais jouée à un équilibre de Nash
➢ Si l'action s_i est strictement dominante pour tout $i \in N$ alors $s = (s_i)_{i \in N}$ est l'unique équilibre de Nash
➢ Si l'action s_i est faiblement dominante pour tout $i \in N$ alors $s = (s_i)_{i \in N}$ est un équilibre de Nash (pas nécessairement le seul, mais les autres EN ne peuvent pas être strictes)

Preuve. Par définition □

✍ Équilibres de Nash en stratégies pures et solutions Pareto optimales des jeux finis précédents ?

Exemple. Deux joueurs peuvent se partager 2 euros. Ils annoncent simultanément une quantité demandée, s_1 et s_2, où $s_1,\ s_2 \in [0,2]$. Si $s_1 + s_2 \leq 2$ alors chaque joueur i reçoit la quantité s_i qu'il a demandé. Si au contraire $s_1 + s_2 > 2$ alors ils ne reçoivent rien

14/ L'ensemble des équilibres de Nash en stratégies pures est l'ensemble des couples $(s_1, s_2) \in [0,2]^2$ tels que $s_1 + s_2 = 2$, et le couple $(s_1, s_2) = (2,2)$. Seul ce dernier est Pareto dominé (les premiers sont Pareto optimaux)

Concrètement, comment se coordonner vers un équilibre dans la situation précédente ?

➥ Notion de **point focal** de Thomas C. Schelling (1921–), prix Nobel d'Économie en 2005 (avec Robert J. Aumann) (image) :

Équilibre que les joueurs ont tendance à jouer lorsqu'ils ne peuvent pas communiquer car il leur semble à tous les deux le plus “naturel”, spécial, ou pertinent (en faisant référence, par exemple, à une culture commune)

Application. Négociations internationales / Bien public

n États négocient le niveau de leur émission de pollution $s_i \geq 0$. L'utilité du pays i est

$$u_i(s_1, \ldots, s_n) = v(s_i) - \sum_{j=1}^{n} s_j$$

où $v' > 0 > v''$ et $v'(0) > 1$, par exemple, $v(x) = \ln(x)$

Chaque joueur a une action dominante

$$\frac{\partial u_i}{\partial s_i}(s) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v'(s_i) = 1$$

$\Rightarrow$ EN unique et symétrique : chaque joueur choisit l'action dominante s_i^* qui vérifie $v'(s_i^*) = 1$. Par exemple, si $v(x) = \ln(x)$ alors $s^* = (1, \ldots, 1)$

Profil d'actions $\overline{s} = (\overline{s}_i)_i$ qui maximise le bien-être social

$$\sum_{i=1}^{n} u_i(s_1, \ldots, s_n) = \sum_{i=1}^{n} v(s_i) - n \sum_{j=1}^{n} s_j$$

est tel que pour tout k,

17/ $$\frac{\partial \sum_{i=1}^{n} u_i}{\partial s_k}(\overline{s}) = 0, \quad \text{c'est-à-dire,} \quad v'(\overline{s}_k) = n$$

$\Rightarrow$ L'EN est Pareto dominé

$v'' < 0 \Rightarrow v' \searrow \Rightarrow s_i^* > \overline{s}_i$: à l'équilibre, les États polluent trop

Taux de taxe θ :

$$u_i(s_1, \ldots, s_n) = v(s_i) - \sum_{j=1}^{n} s_j - \theta s_i + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \theta s_j$$

Action dominante :

18/ $$\frac{\partial u_i}{\partial s_i}(s) = 0 \iff v'(s_i^*) = 1 + \theta - \frac{1}{n}\theta = 1 + \theta \left(\frac{n-1}{n} \right)$$

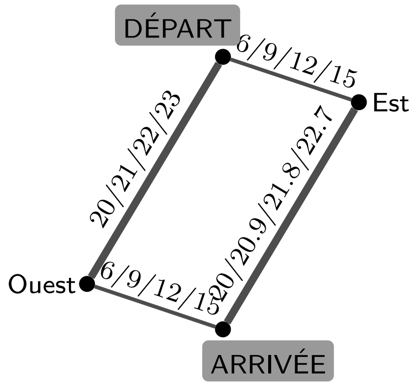
L'EN est équivalent à l'optimum social si

$$1 + \theta \left(\frac{n-1}{n} \right) = n, \quad \text{i.e.,} \quad \theta = n$$

Application. Choix d'itinéraire et paradoxe de Braess

Quatre automobilistes, partant au même moment d'un même point de départ, doivent choisir un itinéraire pour arriver au même point d'arrivée. Deux itinéraires possibles : contournement Est ou contournement Ouest

19/

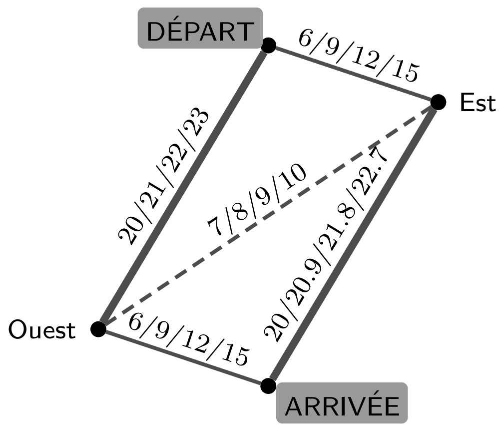


Seuls équilibres de Nash : 2 automobilistes passent à l'Ouest et 2 à l'Est, avec un temps de transport égal à 30 minutes pour les premiers et 29.9 minutes pour les seconds

Une nouvelle route est construite (un tunnel) d'Est en Ouest (les autres routes ne sont pas modifiées)

4 itinéraires : contournement Est, contournement Ouest, Est puis tunnel, ou Ouest puis tunnel (cette dernière stratégie est strictement dominée)

20/



Seuls équilibres de Nash : 2 par l'Est puis le tunnel, 1 par le contournement Ouest et 1 par le contournement Est

➠ Chacun mettra un temps de transport égal à 32 minutes

➠ La construction du tunnel, sans modifier la capacité des routes existantes, a *augmenté* le temps de transport de *tous* les usagers

Existence d'un EN en stratégies pures

Supposons
– $S_i \subseteq \mathbb{R}^K$, K entier, est un ensemble **compact** (fermé et borné)
– $u_i : S \to \mathbb{R}$ est **continue** pour tout $i \in N$

Meilleures réponses pures du joueur i à s_{-i} :

$$\begin{aligned} \mathrm{MR}_i(s_{-i}) &= \arg\max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i}) \\ &= \{s_i \in S_i : u_i(s_i,\, s_{-i}) \geq u_i(s_i',\, s_{-i}),\ \forall\, s_i' \in S_i\} \end{aligned}$$

(non vide d'après le théorème de Weierstrass)

Définition équivalente de l'équilibre de Nash (point fixe) :

$$\begin{aligned} & s_i^* \in \mathrm{MR}_i(s_{-i}^*), \quad \text{pour tout } i \in N \\ \Leftrightarrow \quad & s^* \in \mathrm{MR}(s^*) \quad \text{(forme matricielle)} \end{aligned}$$

où $\mathrm{MR} : S \twoheadrightarrow S$ est définie par $\mathrm{MR}(s) = \mathrm{MR}_1(s_{-1}) \times \cdots \times \mathrm{MR}_n(s_{-n})$

Illustration.

	G	C	D
H	$1\ ,\ 2^*$	$2^*,\ 1$	$1^*,\ 0$
M	$2^*,\ 1^*$	$0\ ,\ 1^*$	$0\ ,\ 0$
B	$0\ ,\ 1$	$0\ ,\ 0$	$1^*,\ 2^*$

23/ $*$ $\leftrightarrow$ stratégie qui est une meilleure réponse à la stratégie de l'autre joueur

Deux $*$ $\leftrightarrow$ chaque joueur joue une meilleure réponse à la stratégie de l'autre

$\leftrightarrow$ équilibre de Nash (ici, (M, G) et (B, D))

Rappel. Soit K un entier positif

Un ensemble $X \subseteq \mathbb{R}^K$ est *convexe* ssi pour tout $\alpha \in [0, 1]$, si x, $x' \in X$ alors $\alpha\, x + (1 - \alpha)\, x' \in X$

Une fonction $f : X \to \mathbb{R}$, où $X \subseteq \mathbb{R}^K$ est un ensemble convexe, est *quasi-concave* ssi pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{x \in X : f(x) \geq y\}$ est convexe

Théorème de point fixe de Kakutani (1941). Soit un ensemble $X \subseteq \mathbb{R}^m$ compact, convexe et non vide, et soit

24/
$$\begin{aligned} f : X &\twoheadrightarrow X \\ x &\mapsto f(x) \subseteq X, \end{aligned}$$

une correspondance telle que

– pour tout $x \in X$ l'ensemble $f(x)$ est non vide et convexe ;
– le graphe de f est fermé, c'est-à-dire que quelles que soient les suites $\{x^n\}$ et $\{y^n\}$ telles que $x^n \to x$, $y^n \to y$ et $y^n \in f(x^n)$ on a $y \in f(x)$

Alors, f a un point fixe : il existe $x^* \in X$ tel que $x^* \in f(x^*)$

Nécessité des conditions du théorème :

(i) X compact

➥ $X = \mathbb{R}$, $f(x) = \{x + 1\}$

(ii) X convexe

➥ X est un cercle, f une rotation $90°$ sur ce cercle

(iii) $f(x)$ convexe pour tout $x \in X$

25/

➥ $X = [0, 1]$ et $f(x) = \begin{cases} \{1\} & \text{si } x < 1/2 \\ \{0, 1\} & \text{si } x = 1/2 \\ \{0\} & \text{si } x > 1/2 \end{cases}$

(iv) graphe de f fermé

➥ $X = [0, 1]$, $f(x) = \{1\}$ si $x < 1$ et $f(1) = \{0\}$

Théorème d'existence d'un EN

Si le jeu $\langle N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N} \rangle$ vérifie les conditions suivantes pour tout $i \in N$
- *l'ensemble des stratégies S_i est un sous espace Euclidien ($S_i \subseteq \mathbb{R}^K$, K entier) non vide, compact et convexe*
- *la fonction d'utilité $u_i : S \to \mathbb{R}$ est continue*
- *la fonction $u_i(\cdot, s_{-i}) : S_i \to \mathbb{R}$ est quasi-concave pour tout $s_{-i} \in S_{-i}$*

alors il existe un équilibre de Nash en stratégies pures

26/ *Preuve.* Il suffit de démontrer que le théorème de point fixe de Kakutani s'applique à la correspondance de meilleure réponse $\mathrm{MR} : S \twoheadrightarrow S$
- $S \subseteq \mathbb{R}^{n \times K}$ compact, convexe et non vide
- $\mathrm{MR}(s)$ est non vide
- $\mathrm{MR}_i(s_{-i})$ est convexe pour tout i car $u_i(\cdot, s_{-i}) : S_i \to \mathbb{R}$ est quasi-concave (par définition)
- le graphe de MR est fermé car $u_i : S \to \mathbb{R}$ est continue pour tout i

Duopole de Cournot, suite

$$u_i(s_1, s_2) = s_i(-\theta_i - s_1 - s_2)$$

Existe-t-il un équilibre de Nash ? OUI car

- $S_1 = S_2 = [0, 1]$ non vides, compacts et convexes
- $u_i(s_i, s_{-i})$ continue par rapport à s
- $u_i(s_i, s_{-i})$ concave par rapport à s_i ($\frac{\partial^2 u_i}{\partial {s_i}^2} < 0$) donc quasi-concave

27/ Meilleures réponses des firmes :

$$\mathrm{MR}_1(s_2) = \left\{ \frac{-\theta_1 - s_2}{2} \right\}$$

$$\mathrm{MR}_2(s_1) = \left\{ \frac{-\theta_2 - s_1}{2} \right\}$$

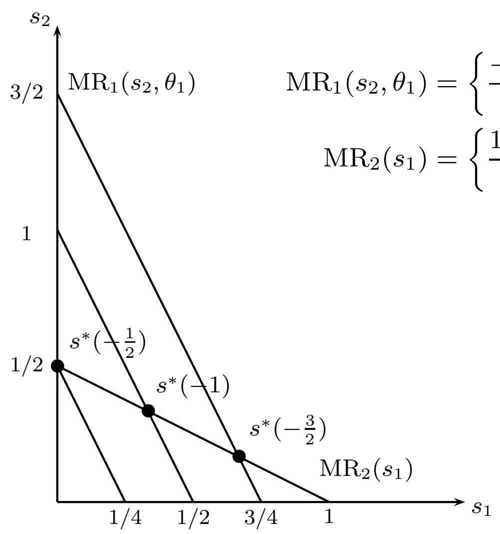
À l'équilibre on obtient donc

$$s_1^* = \frac{\theta_2 - 2\theta_1}{3}$$

$$s_2^* = \frac{\theta_1 - 2\theta_2}{3}$$

Représentation graphique de l'équilibre de Nash du duopole de Cournot en posant $\theta_2 = -1$, pour $\theta_1 = -(3/2)$, -1, et $-(1/2)$

28/



$$\mathrm{MR}_1(s_2, \theta_1) = \left\{ \frac{-\theta_1 - s_2}{2} \right\}$$

$$\mathrm{MR}_2(s_1) = \left\{ \frac{1 - s_1}{2} \right\}.$$

Jeux symétriques

Définition. Un jeu à deux joueurs est un *jeu symétrique* si $S_1 = S_2 = A$ et $u_1(a, b) = u_2(b, a)$ pour tout $a,\ b \in A$

Exemple. Duopole de Cournot précédent si les firmes ont la même fonction de coût. Dans ce cas, l'équilibre de Nash est symétrique : $s_1^* = s_2^* = -\frac{\theta}{3}$

Proposition.
Si un jeu symétrique vérifie les hypothèses du théorème d'existence, alors ce jeu
29/ *admet un équilibre de Nash en stratégies pures qui est symétrique*

Preuve. Si le jeu est symétrique alors on a clairement $\mathrm{MR}_1(a) = \mathrm{MR}_2(a) = f(a)$ pour tout $a \in A$. Comme $f : A \twoheadrightarrow A$ vérifie les conditions du théorème de Kakutani, il existe a^* t.q. $a^* \in f(a^*)$. Le profil de stratégies pures (a^*, a^*) est donc un équilibre de Nash car a^* est une meilleure réponse à a^* pour les deux joueurs ($a^* \in \mathrm{MR}_i(a^*)$, $i = 1,\ 2$) □

Remarque. Tous les équilibres d'un jeu symétrique ne sont pas forcément symétriques (voir le jeu de la poule mouillée)

Duopole de Bertrand

– Compétition entre deux firmes par les prix
– Les firmes décident simultanément d'un prix de vente du bien
– Les consommateurs (une unité en tout) achètent à la firme au prix le plus bas

Forme normale du jeu :

– Joueurs : $N = \{1, 2\}$
30/ – Stratégies : $S_i = \mathbb{R}_+$
– Utilités :

$$u_i(p_i, p_j) = \begin{cases} p_i - c, & \text{si } p_i < p_j \\ 0, & \text{si } p_i > p_j \\ (p_i - c)/2, & \text{si } p_i = p_j \end{cases}$$

Le théorème d'existence d'un équilibre de Nash ne s'applique pas (u_i discontinue)

Il existe cependant un unique équilibre de Nash : $p_1^* = p_2^* = c$ (prix de concurrence parfaite, profits nuls)

Références

KAKUTANI, S. (1941) : "A Generalization of Brouwer's Fixed Point Theorem," *Duke Mathematical Journal*, 8, 457–459.