Jeux sous forme normale

(Jeux statiques à information complète)

Jeux sous forme normale

(Jeux statiques à information complète)

Plan du chapitre

(2 septembre 2007)

Jeux sous forme normale

(Jeux statiques à information complète)

Plan du chapitre

(2 septembre 2007)

– Définitions et exemples

Jeux sous forme normale

(Jeux statiques à information complète)

Plan du chapitre

(2 septembre 2007)

- Définitions et exemples
- Équilibre de Nash

Jeux sous forme normale

(Jeux statiques à information complète)

Plan du chapitre

(2 septembre 2007)

- Définitions et exemples
- Équilibre de Nash
- Applications

Jeux sous forme normale

(Jeux statiques à information complète)

Plan du chapitre

(2 septembre 2007)

- Définitions et exemples
- Équilibre de Nash
- Applications
- Existence d'un équilibre de Nash en stratégies pures

Jeux sous forme normale

(Jeux statiques à information complète)

Plan du chapitre

(2 septembre 2007)

– Définitions et exemples
– Équilibre de Nash
– Applications
– Existence d'un équilibre de Nash en stratégies pures
– Extension mixte d'un jeu et stratégies mixtes

Jeux sous forme normale

(Jeux statiques à information complète)

Plan du chapitre

(2 septembre 2007)

Jeux sous forme normale

(Jeux statiques à information complète)

Plan du chapitre

(2 septembre 2007)

- Définitions et exemples
- Équilibre de Nash
- Applications
- Existence d'un équilibre de Nash en stratégies pures
- Extension mixte d'un jeu et stratégies mixtes
- Stratégie maximin et jeux à somme nulle
- Élimination itérative des stratégies dominées

Définition. Un **jeu sous forme normale** ou **stratégique** est la donnée de 3 éléments :

Définition. Un **jeu sous forme normale** ou **stratégique** est la donnée de 3 éléments :

– $N = \{1, \ldots, n\}$, l'ensemble des **joueurs**

Définition. Un **jeu sous forme normale** ou **stratégique** est la donnée de 3 éléments :

- $N = \{1, \ldots, n\}$, l'ensemble des **joueurs**
- S_i, l'ensemble non vide des **actions** ou **stratégies pures** du joueur i

Définition. Un **jeu sous forme normale** ou **stratégique** est la donnée de 3 éléments :

- $N = \{1, \ldots, n\}$, l'ensemble des **joueurs**
- S_i, l'ensemble non vide des **actions** ou **stratégies pures** du joueur i
- $u_i : \underbrace{S_1 \times \cdots \times S_n}_{S} \to \mathbb{R}$, la **fonction d'utilité**, de **gain** ou de **paiement** du joueur i

Définition. Un **jeu sous forme normale** ou **stratégique** est la donnée de 3 éléments :

- $N = \{1, \ldots, n\}$, l'ensemble des **joueurs**
- S_i, l'ensemble non vide des **actions** ou **stratégies pures** du joueur i
- $u_i : \underbrace{S_1 \times \cdots \times S_n}_{S} \to \mathbb{R}$, la **fonction d'utilité**, de **gain** ou de **paiement** du joueur i

☞ L'utilité du joueur i dépend à la fois de son action et de l'action des **autres** (ses préférences sont définies sur S et non sur S_i)

Définition. Un **jeu sous forme normale** ou **stratégique** est la donnée de 3 éléments :

- $N = \{1, \ldots, n\}$, l'ensemble des **joueurs**
- S_i, l'ensemble non vide des **actions** ou **stratégies pures** du joueur i
- $u_i : \underbrace{S_1 \times \cdots \times S_n}_{S} \to \mathbb{R}$, la **fonction d'utilité**, de **gain** ou de **paiement** du joueur i

☞ L'utilité du joueur i dépend à la fois de son action et de l'action des **autres** (ses préférences sont définies sur S et non sur S_i)

Profil de stratégies, résultat ou issue :

Définition. Un **jeu sous forme normale** ou **stratégique** est la donnée de 3 éléments :

- $N = \{1, \ldots, n\}$, l'ensemble des **joueurs**
- S_i, l'ensemble non vide des **actions** ou **stratégies pures** du joueur i
- $u_i : \underbrace{S_1 \times \cdots \times S_n}_{S} \to \mathbb{R}$, la **fonction d'utilité**, de **gain** ou de **paiement** du joueur i

☞ L'utilité du joueur i dépend à la fois de son action et de l'action des **autres** (ses préférences sont définies sur S et non sur S_i)

Profil de stratégies, résultat ou issue :

$$s = (s_1, \ldots, s_n) \in S = S_1 \times \cdots \times S_n$$

Exemple : Duopole de Cournot

Exemple : Duopole de Cournot

Firme $i = 1, 2$ produit $s_i \in [0, 1]$ avec coût fixe nul et coût marginal constant $\lambda_i > 0$

Exemple : Duopole de Cournot

Firme $i = 1,\, 2$ produit $s_i \in [0, 1]$ avec coût fixe nul et coût marginal constant $\lambda_i > 0$

Demande inverse linéaire : $p(s_1 + s_2) = a - b\,(s_1 + s_2)$, où $a > \lambda_i$, $b > 0$

Exemple : Duopole de Cournot

Firme $i = 1, 2$ produit $s_i \in [0, 1]$ avec coût fixe nul et coût marginal constant $\lambda_i > 0$

Demande inverse linéaire : $p(s_1 + s_2) = a - b\,(s_1 + s_2)$, où $a > \lambda_i$, $b > 0$

Profit de chaque firme i :

$$p(s_1 + s_2)\, s_i - \lambda_i\, s_i$$

Exemple : Duopole de Cournot

Firme $i = 1, 2$ produit $s_i \in [0, 1]$ avec coût fixe nul et coût marginal constant $\lambda_i > 0$

Demande inverse linéaire : $p(s_1 + s_2) = a - b\,(s_1 + s_2)$, où $a > \lambda_i$, $b > 0$

Profit de chaque firme i :

$$p(s_1 + s_2)\, s_i - \lambda_i\, s_i = s_i(a - b(s_1 + s_2) - \lambda_i)$$

Exemple : Duopole de Cournot

Firme $i = 1, 2$ produit $s_i \in [0, 1]$ avec coût fixe nul et coût marginal constant $\lambda_i > 0$

Demande inverse linéaire : $p(s_1 + s_2) = a - b\,(s_1 + s_2)$, où $a > \lambda_i$, $b > 0$

Profit de chaque firme i :

$$\begin{aligned} p(s_1 + s_2)\, s_i - \lambda_i\, s_i &= s_i(a - b(s_1 + s_2) - \lambda_i) \\ &= b\, s_i((a/b) - (s_1 + s_2) - (\lambda_i/b)) \end{aligned}$$

Exemple : Duopole de Cournot

Firme $i = 1, 2$ produit $s_i \in [0, 1]$ avec coût fixe nul et coût marginal constant $\lambda_i > 0$

Demande inverse linéaire : $p(s_1 + s_2) = a - b\,(s_1 + s_2)$, où $a > \lambda_i$, $b > 0$

Profit de chaque firme i :

$$\begin{aligned} p(s_1 + s_2)\, s_i - \lambda_i\, s_i &= s_i(a - b(s_1 + s_2) - \lambda_i) \\ &= b\, s_i((a/b) - (s_1 + s_2) - (\lambda_i/b)) \\ &= b\, s_i(-\theta_i - s_1 - s_2) \end{aligned}$$

Exemple : Duopole de Cournot

Firme $i = 1, 2$ produit $s_i \in [0,1]$ avec coût fixe nul et coût marginal constant $\lambda_i > 0$

Demande inverse linéaire : $p(s_1+s_2) = a - b\,(s_1+s_2)$, où $a > \lambda_i$, $b > 0$

Profit de chaque firme i :

$$\begin{aligned}
p(s_1+s_2)\,s_i - \lambda_i\,s_i &= s_i(a - b(s_1+s_2) - \lambda_i) \\
&= b\,s_i((a/b) - (s_1+s_2) - (\lambda_i/b)) \\
&= b\,s_i(-\theta_i - s_1 - s_2)
\end{aligned}$$

où $\theta_i = \frac{\lambda_i - a}{b} < 0$

Exemple : Duopole de Cournot

Firme $i = 1, 2$ produit $s_i \in [0, 1]$ avec coût fixe nul et coût marginal constant $\lambda_i > 0$

Demande inverse linéaire : $p(s_1 + s_2) = a - b\,(s_1 + s_2)$, où $a > \lambda_i$, $b > 0$

Profit de chaque firme i :

$$\begin{aligned} p(s_1 + s_2)\, s_i - \lambda_i\, s_i &= s_i(a - b(s_1 + s_2) - \lambda_i) \\ &= b\, s_i((a/b) - (s_1 + s_2) - (\lambda_i/b)) \\ &= b\, s_i(-\theta_i - s_1 - s_2) \end{aligned}$$

où $\theta_i = \frac{\lambda_i - a}{b} < 0$

Neutralité au risque + cardinalité $\Rightarrow$ utilité peut être définie par

$$u_i(s_1, s_2) = s_i(-\theta_i - s_1 - s_2)$$

Exemple : Duopole de Cournot

Firme $i = 1, 2$ produit $s_i \in [0,1]$ avec coût fixe nul et coût marginal constant $\lambda_i > 0$

Demande inverse linéaire : $p(s_1 + s_2) = a - b\,(s_1 + s_2)$, où $a > \lambda_i$, $b > 0$

Profit de chaque firme i :

$$\begin{aligned} p(s_1 + s_2)\,s_i - \lambda_i\,s_i &= s_i(a - b(s_1 + s_2) - \lambda_i) \\ &= b\,s_i((a/b) - (s_1 + s_2) - (\lambda_i/b)) \\ &= b\,s_i(-\theta_i - s_1 - s_2) \end{aligned}$$

où $\theta_i = \frac{\lambda_i - a}{b} < 0$

Neutralité au risque + cardinalité $\Rightarrow$ utilité peut être définie par

$$u_i(s_1, s_2) = s_i(-\theta_i - s_1 - s_2)$$

La forme normale est donc déterminée : $N = \{1, 2\}$, $S_1 = S_2 = [0,1]$, u_1 et u_2

Un jeu sous forme normale $\langle N,\ (S_i)_{i\in N},\ (u_i)_{i\in N}\rangle$ est fini si l'ensemble des joueurs et l'ensemble des actions de chaque joueur sont finis

Un jeu sous forme normale $\langle N,\ (S_i)_{i\in N},\ (u_i)_{i\in N}\rangle$ est fini si l'ensemble des joueurs et l'ensemble des actions de chaque joueur sont finis (le duopole de Cournot n'est pas fini)

Un jeu sous forme normale $\langle N,\ (S_i)_{i\in N},\ (u_i)_{i\in N}\rangle$ est fini si l'ensemble des joueurs et l'ensemble des actions de chaque joueur sont finis (le duopole de Cournot n'est pas fini)

Représentation d'un jeu fini à deux joueurs :

Un jeu sous forme normale $\langle N,\ (S_i)_{i\in N},\ (u_i)_{i\in N}\rangle$ est fini si l'ensemble des joueurs et l'ensemble des actions de chaque joueur sont finis (le duopole de Cournot n'est pas fini)

Représentation d'un jeu fini à deux joueurs :

	$\cdots$	s_2	$\cdots$
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
s_1	$\vdots$	$u_1(s_1, s_2); u_2(s_1, s_2)$	$\vdots$
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

Un jeu sous forme normale $\langle N,\ (S_i)_{i\in N},\ (u_i)_{i\in N}\rangle$ est fini si l'ensemble des joueurs et l'ensemble des actions de chaque joueur sont finis (le duopole de Cournot n'est pas fini)

Représentation d'un jeu fini à deux joueurs :

	$\cdots$	s_2	$\cdots$
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
s_1	$\vdots$	$u_1(s_1, s_2); u_2(s_1, s_2)$	$\vdots$
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

Trois joueurs (2 actions / joueur) :

Un jeu sous forme normale $\langle N,\ (S_i)_{i\in N},\ (u_i)_{i\in N}\rangle$ est fini si l'ensemble des joueurs et l'ensemble des actions de chaque joueur sont finis (le duopole de Cournot n'est pas fini)

Représentation d'un jeu fini à deux joueurs :

	$\cdots$	s_2	$\cdots$
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
s_1	$\vdots$	$u_1(s_1,s_2); u_2(s_1,s_2)$	$\vdots$
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

Trois joueurs (2 actions / joueur) :

	s_2	s_2'
s_1	$u(s_1,s_2,s_3)$	$u(s_1,s_2',s_3)$
s_1'	$u(s_1',s_2,s_3)$	$u(s_1',s_2',s_3)$

s_3

	s_2	s_2'
s_1	$u(s_1,s_2,s_3')$	$u(s_1,s_2',s_3')$
s_1'	$u(s_1',s_2,s_3')$	$u(s_1',s_2',s_3')$

s_3'

où $u(\cdot) = (u_1(\cdot),\ u_2(\cdot),\ u_3(\cdot))$

Dilemme des prisonniers.

Dilemme des prisonniers.

$N = \{1, 2\}$, $S_1 = \{D, C\}$, $S_2 = \{D, C\}$

Dilemme des prisonniers.

$N = \{1, 2\}$, $\quad S_1 = \{D, C\}$, $\quad S_2 = \{D, C\}$

$S = \{(D, D), (D, C), (C, D), (C, C)\}$

Dilemme des prisonniers.

$N = \{1, 2\}$, $\quad S_1 = \{D, C\}$, $\quad S_2 = \{D, C\}$

$S = \{(D, D), (D, C), (C, D), (C, C)\}$

	D	C
D	$(1, 1)$	$(3, 0)$
C	$(0, 3)$	$(2, 2)$

Dilemme des prisonniers.

$N = \{1, 2\}$, $S_1 = \{D, C\}$, $S_2 = \{D, C\}$

$S = \{(D, D), (D, C), (C, D), (C, C)\}$

	D	C
D	$(1, 1)$	$(3, 0)$
C	$(0, 3)$	$(2, 2)$

Chaque joueur gagne à faire défection **quelle que soit l'action de l'autre joueur**

Dilemme des prisonniers.

$N = \{1, 2\}$, $S_1 = \{D, C\}$, $S_2 = \{D, C\}$

$S = \{(D, D), (D, C), (C, D), (C, C)\}$

	D	C
D	$(1, 1)$	$(3, 0)$
C	$(0, 3)$	$(2, 2)$

Chaque joueur gagne à faire défection **quelle que soit l'action de l'autre joueur**

➥ Dilemme rationalité individuelle/collective

Dilemme des prisonniers.

$N = \{1, 2\}$, $S_1 = \{D, C\}$, $S_2 = \{D, C\}$

$S = \{(D, D), (D, C), (C, D), (C, C)\}$

	D	C
D	$(1, 1)$	$(3, 0)$
C	$(0, 3)$	$(2, 2)$

Chaque joueur gagne à faire défection **quelle que soit l'action de l'autre joueur**

➥ Dilemme rationalité individuelle/collective

Remarque. Sous-entendus du modèle :

Dilemme des prisonniers.

$N = \{1, 2\}$, $\quad S_1 = \{D, C\}$, $\quad S_2 = \{D, C\}$

$S = \{(D, D), (D, C), (C, D), (C, C)\}$

	D	C
D	$(1, 1)$	$(3, 0)$
C	$(0, 3)$	$(2, 2)$

Chaque joueur gagne à faire défection **quelle que soit l'action de l'autre joueur**

➥ Dilemme rationalité individuelle/collective

Remarque. Sous-entendus du modèle :

– Les décisions des joueurs sont indépendantes

Dilemme des prisonniers.

$N = \{1, 2\}, \quad S_1 = \{D, C\}, \quad S_2 = \{D, C\}$

$S = \{(D, D), (D, C), (C, D), (C, C)\}$

	D	C
D	$(1, 1)$	$(3, 0)$
C	$(0, 3)$	$(2, 2)$

Chaque joueur gagne à faire défection **quelle que soit l'action de l'autre joueur**

➥ Dilemme rationalité individuelle/collective

Remarque. Sous-entendus du modèle :

– Les décisions des joueurs sont indépendantes

– Les deux joueurs connaissent le jeu et jouent une seule fois

✍ Reprendre le duopole de Cournot avec $\lambda_1 = \lambda_2 = b = 1$ et $a = 4$ en supposant que chaque firme i a uniquement le choix entre la quantité $s_i = 1$ (produire beaucoup) et la quantité $s_i = 3/4$ (produire peu)

✍ Reprendre le duopole de Cournot avec $\lambda_1 = \lambda_2 = b = 1$ et $a = 4$ en supposant que chaque firme i a uniquement le choix entre la quantité $s_i = 1$ (produire beaucoup) et la quantité $s_i = 3/4$ (produire peu)

Montrer que ce jeu est équivalent au jeu du dilemme des prisonniers de la figure ci-dessous

	Produire beaucoup	Produire peu
Produire beaucoup	$(10\,000,\ 10\,000)$	$(12\,500,\ \ 9\,375)$
Produire peu	$(\ 9\,375,\ 12\,500)$	$(11\,250,\ 11\,250)$

✍ Reprendre le duopole de Cournot avec $\lambda_1 = \lambda_2 = b = 1$ et $a = 4$ en supposant que chaque firme i a uniquement le choix entre la quantité $s_i = 1$ (produire beaucoup) et la quantité $s_i = 3/4$ (produire peu)

Montrer que ce jeu est équivalent au jeu du dilemme des prisonniers de la figure ci-dessous

	Produire beaucoup	Produire peu
Produire beaucoup	$(10\,000,\ 10\,000)$	$(12\,500,\ \ 9\,375)$
Produire peu	$(\ 9\,375,\ 12\,500)$	$(11\,250,\ 11\,250)$

✍ Variante du dilemme des prisonniers, avec des joueurs asymétriques, où la coopération est dominante pour un des joueurs pdf

L'action s_i du joueur i domine faiblement l'action s_i' du joueur i si

L'action s_i du joueur i domine faiblement l'action s'_i du joueur i si

$$\begin{aligned} \forall\, s_{-i} \in S_{-i}, \quad u_i(s_i, s_{-i}) & \geq u_i(s'_i, s_{-i}) \\ \exists\, s_{-i} \in S_{-i}, \quad u_i(s_i, s_{-i}) & > u_i(s'_i, s_{-i}) \end{aligned}$$

L'action s_i du joueur i domine faiblement l'action s'_i du joueur i si

$$\begin{array}{rcl} \forall\, s_{-i} \in S_{-i}, \quad u_i(s_i, s_{-i}) & \geq & u_i(s'_i, s_{-i}) \\ \exists\, s_{-i} \in S_{-i}, \quad u_i(s_i, s_{-i}) & > & u_i(s'_i, s_{-i}) \end{array}$$

L'action s_i domine strictement l'action s'_i si

L'action s_i du joueur i domine faiblement l'action s_i' du joueur i si

$$\begin{array}{lcl} \forall\, s_{-i} \in S_{-i}, \quad u_i(s_i, s_{-i}) & \geq & u_i(s_i', s_{-i}) \\ \exists\, s_{-i} \in S_{-i}, \quad u_i(s_i, s_{-i}) & > & u_i(s_i', s_{-i}) \end{array}$$

L'action s_i domine strictement l'action s_i' si

$$\forall\, s_{-i} \in S_{-i}, \quad u_i(s_i, s_{-i}) \quad > \quad u_i(s_i', s_{-i})$$

L'action s_i du joueur i domine faiblement l'action s'_i du joueur i si

$$\begin{array}{lcl} \forall\, s_{-i} \in S_{-i}, \quad u_i(s_i, s_{-i}) & \geq & u_i(s'_i, s_{-i}) \\ \exists\, s_{-i} \in S_{-i}, \quad u_i(s_i, s_{-i}) & > & u_i(s'_i, s_{-i}) \end{array}$$

L'action s_i domine strictement l'action s'_i si

$$\forall\, s_{-i} \in S_{-i}, \quad u_i(s_i, s_{-i}) \quad > \quad u_i(s'_i, s_{-i})$$

Une action est strictement/faiblement dominante si elle domine strictement/faiblement toutes les autres actions

L'action s_i du joueur i domine faiblement l'action s'_i du joueur i si

$$\begin{array}{rcl} \forall\, s_{-i} \in S_{-i}, \quad u_i(s_i, s_{-i}) & \geq & u_i(s'_i, s_{-i}) \\ \exists\, s_{-i} \in S_{-i}, \quad u_i(s_i, s_{-i}) & > & u_i(s'_i, s_{-i}) \end{array}$$

L'action s_i domine strictement l'action s'_i si

$$\forall\, s_{-i} \in S_{-i}, \quad u_i(s_i, s_{-i}) \quad > \quad u_i(s'_i, s_{-i})$$

Une action est strictement/faiblement dominante si elle domine strictement/faiblement toutes les autres actions

Exemple. Dans le jeu suivant H domine faiblement M, M domine faiblement B et H domine strictement B. Aucun ordre de dominance ne peut être établi pour le joueur 2

	G	D
H	$(2,0)$	$(1,0)$
M	$(2,2)$	$(0,0)$
B	$(1,0)$	$(0,2)$

☞ Mais insuffisant en général

☞ Mais insuffisant en général

Un jeu de coordination.

	a	b
a	$(2,2)$	$(0,0)$
b	$(0,0)$	$(1,1)$

☞ Mais insuffisant en général

Un jeu de coordination.

	a	b
a	$(2,2)$	$(0,0)$
b	$(0,0)$	$(1,1)$

Bataille des sexes.

	a	b
a	$(3,2)$	$(1,1)$
b	$(0,0)$	$(2,3)$

Jeu de la poule mouillée. (la fureur de vivre) image

	a	b
a	$(2,2)$	$(1,3)$
b	$(3,1)$	$(0,0)$

Jeu de la poule mouillée. (la fureur de vivre) image

	a	b
a	$(2,2)$	$(1,3)$
b	$(3,1)$	$(0,0)$

La chasse au cerf.

	a	b
a	$(3,3)$	$(0,2)$
b	$(2,0)$	$(1,1)$

Jeux à somme nulle (compétition stricte)

Jeux à somme nulle (compétition stricte)

Cache bouton. (“*matching pennies*”)

	G	D
G	$(-1, 1)$	$(1, -1)$
D	$(1, -1)$	$(-1, 1)$

Jeux à somme nulle (compétition stricte)

Cache bouton. (“*matching pennies*”)

	G	D
G	$(-1,1)$	$(1,-1)$
D	$(1,-1)$	$(-1,1)$

Feuille, Pierre, Ciseaux.

	F	P	C
F	$(0,0)$	$(1,-1)$	$(-1,1)$
P	$(-1,1)$	$(0,0)$	$(1,-1)$
C	$(1,-1)$	$(-1,1)$	$(0,0)$

Équilibre de Nash

Équilibre de Nash

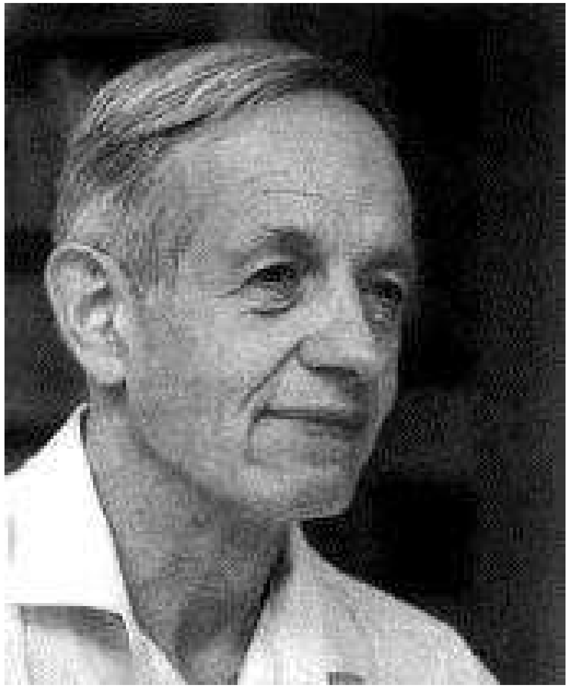


FIG. 1 – John F. Nash Jr (1928–)

Équilibre de Nash

FIG. 1 – John F. Nash Jr (1928–)

Équilibre de Nash

FIG. 1 – John F. Nash Jr (1928–)

Concept de stabilité : situation où aucun joueur n'a intérêt à dévier unilatéralement (individuellement) de sa stratégie

Définition. Un équilibre de Nash en stratégies pures d'un jeu sous forme normale

$$\langle N,\, (S_i)_{i \in N},\, (u_i)_{i \in N} \rangle$$

est un profil d'actions $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*) \in S$ tel que l'action de chaque joueur est une meilleure réponse aux actions choisies par les autres joueurs, c'est-à-dire

$$u_i(s_i^*,\, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i,\, s_{-i}^*), \quad \forall\, s_i \in S_i,\ \forall\, i \in N$$

Définition. Un équilibre de Nash en stratégies pures d'un jeu sous forme normale

$$\langle N,\, (S_i)_{i\in N},\, (u_i)_{i\in N}\rangle$$

est un profil d'actions $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*) \in S$ tel que l'action de chaque joueur est une meilleure réponse aux actions choisies par les autres joueurs, c'est-à-dire

$$u_i(s_i^*,\, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i,\, s_{-i}^*), \quad \forall\, s_i \in S_i,\ \forall\, i \in N$$

Si de plus chaque joueur i préfère strictement jouer l'action s_i^*, c'est-à-dire

$$u_i(s_i^*,\, s_{-i}^*) > u_i(s_i,\, s_{-i}^*), \quad \forall\, s_i \neq s_i^*,\ \forall\, i \in N$$

alors s^* est un équilibre de Nash strict

☞ Situation où les joueurs anticipent correctement les stratégies des autres et se comportent rationnement étant donné leurs anticipations

☞ Situation où les joueurs anticipent correctement les stratégies des autres et se comportent rationnement étant donné leurs anticipations

– Anticipations auto-réalisatrices

☞ Situation où les joueurs anticipent correctement les stratégies des autres et se comportent rationnement étant donné leurs anticipations

– Anticipations auto-réalisatrices

– Conventions

☞ Situation où les joueurs anticipent correctement les stratégies des autres et se comportent rationnement étant donné leurs anticipations

– Anticipations auto-réalisatrices
– Conventions

Proposition.

☞ Situation où les joueurs anticipent correctement les stratégies des autres et se comportent rationnement étant donné leurs anticipations

– Anticipations auto-réalisatrices

– Conventions

Proposition.

➢ Si l'action s_i est strictement dominée alors s_i n'est jamais jouée à un équilibre de Nash

☞ Situation où les joueurs anticipent correctement les stratégies des autres et se comportent rationnement étant donné leurs anticipations

– Anticipations auto-réalisatrices
– Conventions

Proposition.

➢ Si l'action s_i est strictement dominée alors s_i n'est jamais jouée à un équilibre de Nash

➢ Si l'action s_i est strictement dominante pour tout $i \in N$ alors $s = (s_i)_{i \in N}$ est l'unique équilibre de Nash

☞ Situation où les joueurs anticipent correctement les stratégies des autres et se comportent rationnement étant donné leurs anticipations

– Anticipations auto-réalisatrices
– Conventions

Proposition.

➢ Si l'action s_i est strictement dominée alors s_i n'est jamais jouée à un équilibre de Nash

➢ Si l'action s_i est strictement dominante pour tout $i \in N$ alors $s = (s_i)_{i \in N}$ est l'unique équilibre de Nash

➢ Si l'action s_i est faiblement dominante pour tout $i \in N$ alors $s = (s_i)_{i \in N}$ est un équilibre de Nash (pas nécessairement le seul, mais les autres EN ne peuvent pas être strictes)

☞ Situation où les joueurs anticipent correctement les stratégies des autres et se comportent rationnement étant donné leurs anticipations

– Anticipations auto-réalisatrices
– Conventions

Proposition.

➢ Si l'action s_i est strictement dominée alors s_i n'est jamais jouée à un équilibre de Nash

➢ Si l'action s_i est strictement dominante pour tout $i \in N$ alors $s = (s_i)_{i \in N}$ est l'unique équilibre de Nash

➢ Si l'action s_i est faiblement dominante pour tout $i \in N$ alors $s = (s_i)_{i \in N}$ est un équilibre de Nash (pas nécessairement le seul, mais les autres EN ne peuvent pas être strictes)

Preuve. Par définition □

✍ Équilibres de Nash en stratégies pures et solutions Pareto optimales des jeux finis précédents ?

✍ Équilibres de Nash en stratégies pures et solutions Pareto optimales des jeux finis précédents ?

Exemple. Deux joueurs peuvent se partager 2 euros. Ils annoncent simultanément une quantité demandée, s_1 et s_2, où s_1, $s_2 \in [0,2]$. Si $s_1 + s_2 \leq 2$ alors chaque joueur i reçoit la quantité s_i qu'il a demandé. Si au contraire $s_1 + s_2 > 2$ alors ils ne reçoivent rien

✍ Équilibres de Nash en stratégies pures et solutions Pareto optimales des jeux finis précédents ?

Exemple. Deux joueurs peuvent se partager 2 euros. Ils annoncent simultanément une quantité demandée, s_1 et s_2, où s_1, $s_2 \in [0, 2]$. Si $s_1 + s_2 \leq 2$ alors chaque joueur i reçoit la quantité s_i qu'il a demandé. Si au contraire $s_1 + s_2 > 2$ alors ils ne reçoivent rien

L'ensemble des équilibres de Nash en stratégies pures est l'ensemble des couples $(s_1, s_2) \in [0, 2]^2$ tels que $s_1 + s_2 = 2$, et le couple $(s_1, s_2) = (2, 2)$. Seul ce dernier est Pareto dominé (les premiers sont Pareto optimaux)

Concrètement, comment se coordonner vers un équilibre dans la situation précédente ?

Concrètement, comment se coordonner vers un équilibre dans la situation précédente ?

➥ Notion de **point focal** de Thomas C. Schelling (1921–), prix Nobel d'Économie en 2005 (avec Robert J. Aumann) (image) :

Concrètement, comment se coordonner vers un équilibre dans la situation précédente ?

➥ Notion de **point focal** de Thomas C. Schelling (1921–), prix Nobel d'Économie en 2005 (avec Robert J. Aumann) (image) :

Équilibre que les joueurs ont tendance à jouer lorsqu'ils ne peuvent pas communiquer car il leur semble à tous les deux le plus “naturel”, spécial, ou pertinent (en faisant référence, par exemple, à une culture commune)

Application. Négociations internationales / Bien public

Application. Négociations internationales / Bien public

n États négocient le niveau de leur émission de pollution $s_i \geq 0$. L'utilité du pays i est

$$u_i(s_1, \ldots, s_n) = v(s_i) - \sum_{j=1}^{n} s_j$$

où $v' > 0 > v''$ et $v'(0) > 1$

Application. Négociations internationales / Bien public

n États négocient le niveau de leur émission de pollution $s_i \geq 0$. L'utilité du pays i est

$$u_i(s_1, \ldots, s_n) = v(s_i) - \sum_{j=1}^{n} s_j$$

où $v' > 0 > v''$ et $v'(0) > 1$, par exemple, $v(x) = \ln(x)$

Application. Négociations internationales / Bien public

n États négocient le niveau de leur émission de pollution $s_i \geq 0$. L'utilité du pays i est

$$u_i(s_1, \ldots, s_n) = v(s_i) - \sum_{j=1}^{n} s_j$$

où $v' > 0 > v''$ et $v'(0) > 1$, par exemple, $v(x) = \ln(x)$

Chaque joueur a une action dominante

$$\frac{\partial u_i}{\partial s_i}(s) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v'(s_i) = 1$$

Application. Négociations internationales / Bien public

n États négocient le niveau de leur émission de pollution $s_i \geq 0$. L'utilité du pays i est

$$u_i(s_1, \ldots, s_n) = v(s_i) - \sum_{j=1}^{n} s_j$$

où $v' > 0 > v''$ et $v'(0) > 1$, par exemple, $v(x) = \ln(x)$

Chaque joueur a une action dominante

$$\frac{\partial u_i}{\partial s_i}(s) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v'(s_i) = 1$$

$\Rightarrow$ EN unique et symétrique : chaque joueur choisit l'action dominante s_i^* qui vérifie $v'(s_i^*) = 1$. Par exemple, si $v(x) = \ln(x)$ alors $s^* = (1, \ldots, 1)$

Profil d'actions $\overline{s} = (\overline{s}_i)_i$ qui maximise le bien-être social

Profil d'actions $\overline{s} = (\overline{s}_i)_i$ qui maximise le bien-être social

$$\sum_{i=1}^{n} u_i(s_1, \ldots, s_n) = \sum_{i=1}^{n} v(s_i) - n \sum_{j=1}^{n} s_j$$

Profil d'actions $\overline{s} = (\overline{s}_i)_i$ qui maximise le bien-être social

$$\sum_{i=1}^{n} u_i(s_1, \ldots, s_n) = \sum_{i=1}^{n} v(s_i) - n \sum_{j=1}^{n} s_j$$

est tel que pour tout k,

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{n} u_i}{\partial s_k}(\overline{s}) = 0, \quad \text{c'est-à-dire,} \quad v'(\overline{s}_k) = n$$

Profil d'actions $\overline{s} = (\overline{s}_i)_i$ qui maximise le bien-être social

$$\sum_{i=1}^{n} u_i(s_1, \ldots, s_n) = \sum_{i=1}^{n} v(s_i) - n \sum_{j=1}^{n} s_j$$

est tel que pour tout k,

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{n} u_i}{\partial s_k}(\overline{s}) = 0, \quad \text{c'est-à-dire,} \quad v'(\overline{s}_k) = n$$

$\Rightarrow$ L'EN est Pareto dominé

Profil d'actions $\overline{s} = (\overline{s}_i)_i$ qui maximise le bien-être social

$$\sum_{i=1}^{n} u_i(s_1, \ldots, s_n) = \sum_{i=1}^{n} v(s_i) - n \sum_{j=1}^{n} s_j$$

est tel que pour tout k,

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{n} u_i}{\partial s_k}(\overline{s}) = 0, \quad \text{c'est-à-dire,} \quad v'(\overline{s}_k) = n$$

$\Rightarrow$ L'EN est Pareto dominé

$v'' < 0 \Rightarrow v' \searrow \Rightarrow s_i^* > \overline{s}_i$: à l'équilibre, les États polluent trop

Taux de taxe θ :

Taux de taxe θ :

$$u_i(s_1, \ldots, s_n) = v(s_i) - \sum_{j=1}^{n} s_j - \theta s_i + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \theta s_j$$

Taux de taxe θ :

$$u_i(s_1, \ldots, s_n) = v(s_i) - \sum_{j=1}^{n} s_j - \theta s_i + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \theta s_j$$

Action dominante :

Taux de taxe θ :

$$u_i(s_1, \ldots, s_n) = v(s_i) - \sum_{j=1}^{n} s_j - \theta s_i + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \theta s_j$$

Action dominante :

$$\frac{\partial u_i}{\partial s_i}(s) = 0 \iff v'(s_i^*) = 1 + \theta - \frac{1}{n}\theta = 1 + \theta \left(\frac{n-1}{n} \right)$$

Taux de taxe θ :

$$u_i(s_1, \ldots, s_n) = v(s_i) - \sum_{j=1}^{n} s_j - \theta s_i + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \theta s_j$$

Action dominante :

$$\frac{\partial u_i}{\partial s_i}(s) = 0 \;\Leftrightarrow\; v'(s_i^*) = 1 + \theta - \frac{1}{n}\theta = 1 + \theta \left(\frac{n-1}{n} \right)$$

L'EN est équivalent à l'optimum social si

Taux de taxe θ :

$$u_i(s_1, \ldots, s_n) = v(s_i) - \sum_{j=1}^{n} s_j - \theta s_i + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \theta s_j$$

Action dominante :

$$\frac{\partial u_i}{\partial s_i}(s) = 0 \;\Leftrightarrow\; v'(s_i^*) = 1 + \theta - \frac{1}{n}\theta = 1 + \theta \left(\frac{n-1}{n} \right)$$

L'EN est équivalent à l'optimum social si

$$1 + \theta \left(\frac{n-1}{n} \right) = n, \quad \text{i.e.,} \quad \theta = n$$

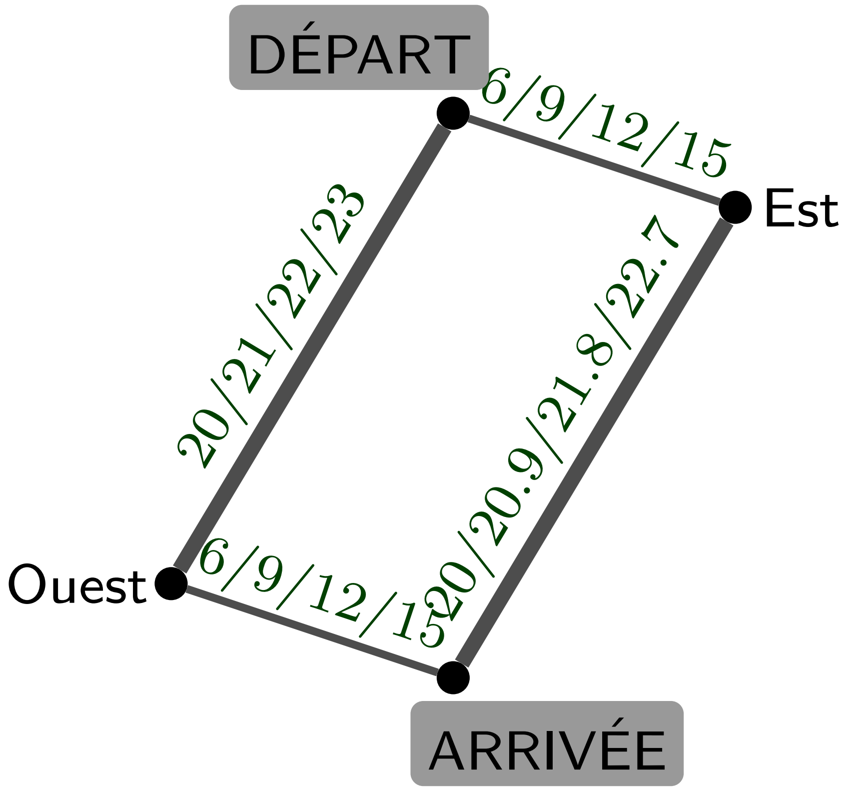
Application. Choix d'itinéraire et paradoxe de Braess

Application. Choix d'itinéraire et paradoxe de Braess

Quatre automobilistes, partant au même moment d'un même point de départ, doivent choisir un itinéraire pour arriver au même point d'arrivée. Deux itinéraires possibles : contournement Est ou contournement Ouest

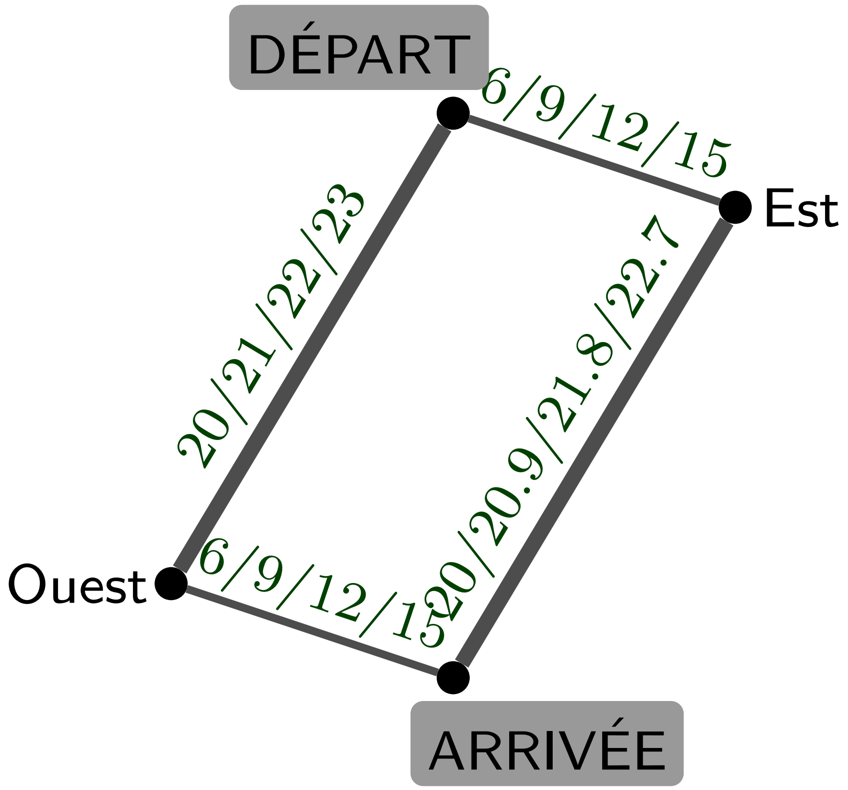
Application. Choix d'itinéraire et paradoxe de Braess

Quatre automobilistes, partant au même moment d'un même point de départ, doivent choisir un itinéraire pour arriver au même point d'arrivée. Deux itinéraires possibles : contournement Est ou contournement Ouest



Application. Choix d'itinéraire et paradoxe de Braess

Quatre automobilistes, partant au même moment d'un même point de départ, doivent choisir un itinéraire pour arriver au même point d'arrivée. Deux itinéraires possibles : contournement Est ou contournement Ouest

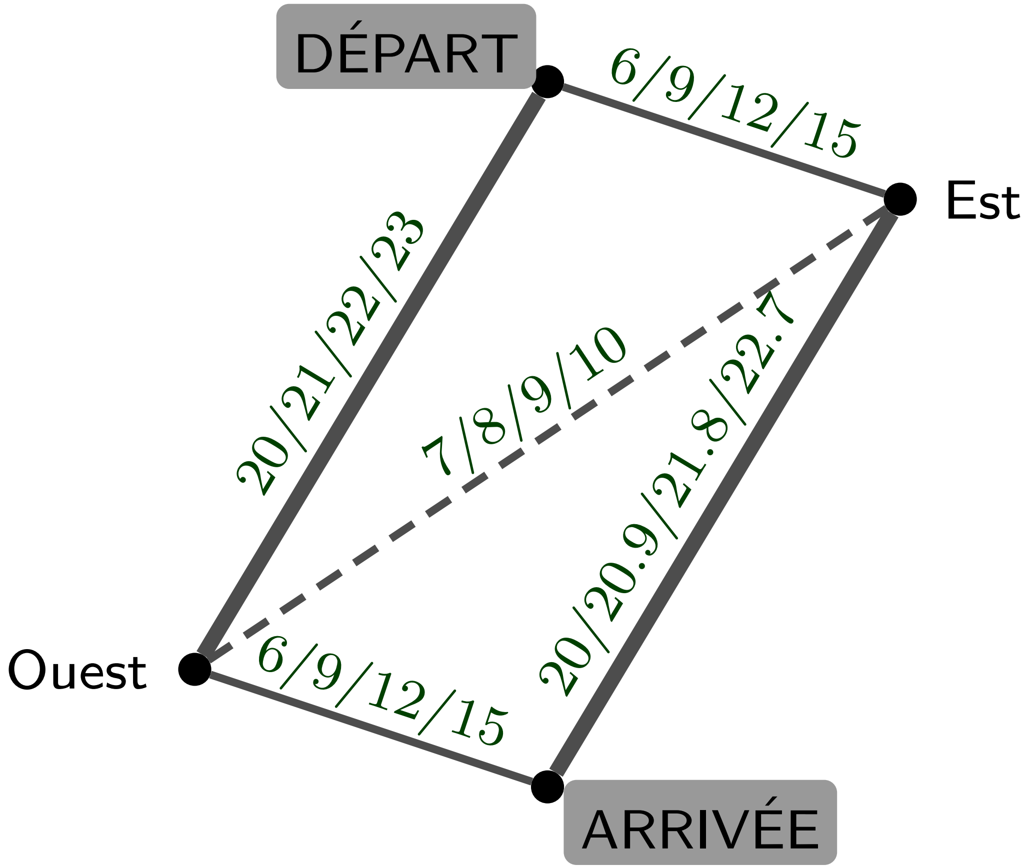


Seuls équilibres de Nash : 2 automobilistes passent à l'Ouest et 2 à l'Est, avec un temps de transport égal à 30 minutes pour les premiers et 29.9 minutes pour les seconds

Une nouvelle route est construite (un tunnel) d'Est en Ouest (les autres routes ne sont pas modifiées)

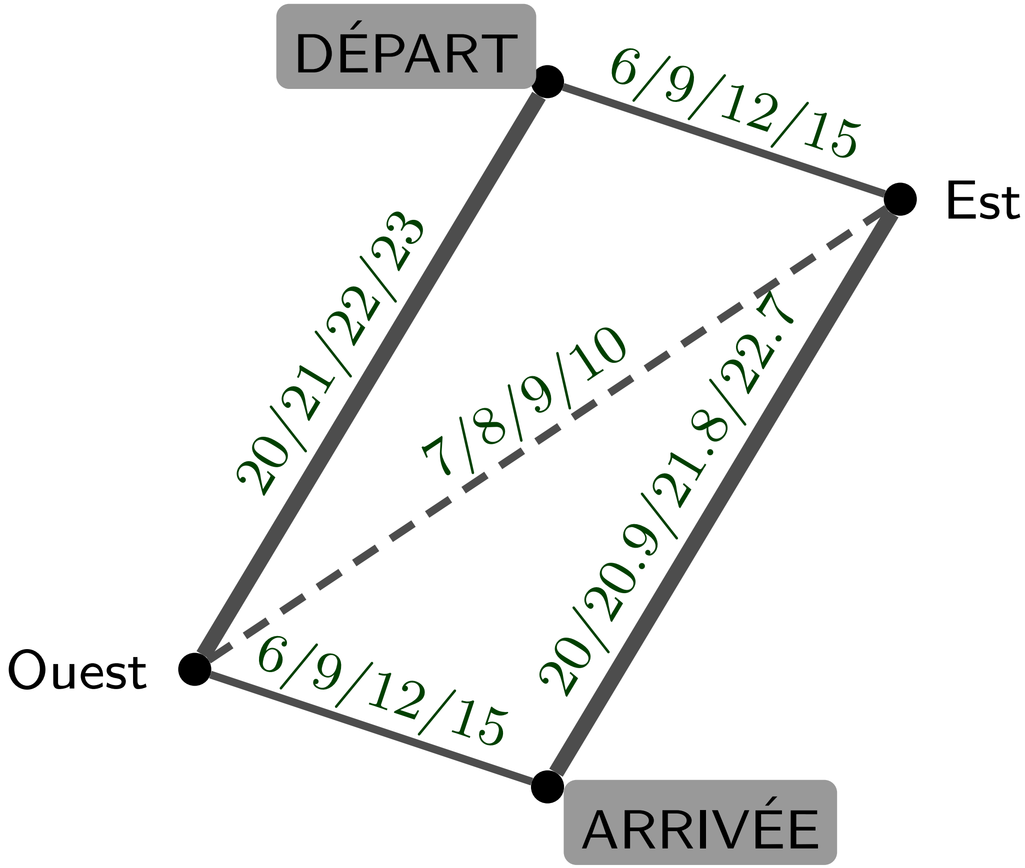
Une nouvelle route est construite (un tunnel) d'Est en Ouest (les autres routes ne sont pas modifiées)

4 itinéraires : contournement Est, contournement Ouest, Est puis tunnel, ou Ouest puis tunnel (cette dernière stratégie est strictement dominée)



Une nouvelle route est construite (un tunnel) d'Est en Ouest (les autres routes ne sont pas modifiées)

4 itinéraires : contournement Est, contournement Ouest, Est puis tunnel, ou Ouest puis tunnel (cette dernière stratégie est strictement dominée)



Seuls équilibres de Nash : 2 par l'Est puis le tunnel, 1 par le contournement Ouest et 1 par le contournement Est

- Chacun mettra un temps de transport égal à 32 minutes

➠ Chacun mettra un temps de transport égal à 32 minutes

➠ La construction du tunnel, sans modifier la capacité des routes existantes, a augmenté le temps de transport de tous les usagers

Existence d'un EN en stratégies pures

Existence d'un EN en stratégies pures

Supposons

Existence d'un EN en stratégies pures

Supposons

– $S_i \subseteq \mathbb{R}^K$, K entier, est un ensemble **compact** (fermé et borné)

Existence d'un EN en stratégies pures

Supposons

– $S_i \subseteq \mathbb{R}^K$, K entier, est un ensemble **compact** (fermé et borné)

– $u_i : S \longrightarrow \mathbb{R}$ est **continue** pour tout $i \in N$

Existence d'un EN en stratégies pures

Supposons

– $S_i \subseteq \mathbb{R}^K$, K entier, est un ensemble **compact** (fermé et borné)

– $u_i : S \longrightarrow \mathbb{R}$ est **continue** pour tout $i \in N$

Meilleures réponses pures du joueur i à s_{-i} :

Existence d'un EN en stratégies pures

Supposons

– $S_i \subseteq \mathbb{R}^K$, K entier, est un ensemble **compact** (fermé et borné)

– $u_i : S \longrightarrow \mathbb{R}$ est **continue** pour tout $i \in N$

Meilleures réponses pures du joueur i à s_{-i} :

$$\mathrm{MR}_i(s_{-i})$$

Existence d'un EN en stratégies pures

Supposons

– $S_i \subseteq \mathbb{R}^K$, K entier, est un ensemble **compact** (fermé et borné)

– $u_i : S \longrightarrow \mathbb{R}$ est **continue** pour tout $i \in N$

Meilleures réponses pures du joueur i à s_{-i} :

$$\mathrm{MR}_i(s_{-i}) = \arg\max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i})$$

Existence d'un EN en stratégies pures

Supposons

- $S_i \subseteq \mathbb{R}^K$, K entier, est un ensemble **compact** (fermé et borné)
- $u_i : S \longrightarrow \mathbb{R}$ est **continue** pour tout $i \in N$

Meilleures réponses pures du joueur i à s_{-i} :

$$\begin{aligned}\mathrm{MR}_i(s_{-i}) &= \arg\max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i}) \\ &= \{s_i \in S_i : u_i(s_i,\, s_{-i}) \geq u_i(s_i',\, s_{-i}),\ \forall\ s_i' \in S_i\}\end{aligned}$$

Existence d'un EN en stratégies pures

Supposons

- $S_i \subseteq \mathbb{R}^K$, K entier, est un ensemble **compact** (fermé et borné)
- $u_i : S \longrightarrow \mathbb{R}$ est **continue** pour tout $i \in N$

Meilleures réponses pures du joueur i à s_{-i} :

$$\begin{aligned} \mathrm{MR}_i(s_{-i}) &= \arg\max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i}) \\ &= \{s_i \in S_i : u_i(s_i,\, s_{-i}) \geq u_i(s_i',\, s_{-i}),\ \forall\ s_i' \in S_i\} \end{aligned}$$

(non vide d'après le théorème de Weierstrass)

Existence d'un EN en stratégies pures

Supposons

– $S_i \subseteq \mathbb{R}^K$, K entier, est un ensemble **compact** (fermé et borné)

– $u_i : S \to \mathbb{R}$ est **continue** pour tout $i \in N$

Meilleures réponses pures du joueur i à s_{-i} :

$$\begin{aligned}\mathrm{MR}_i(s_{-i}) &= \arg\max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i}) \\ &= \{s_i \in S_i : u_i(s_i,\, s_{-i}) \geq u_i(s_i',\, s_{-i}),\ \forall\ s_i' \in S_i\}\end{aligned}$$

(non vide d'après le théorème de Weierstrass)

Définition équivalente de l'équilibre de Nash (point fixe) :

Existence d'un EN en stratégies pures

Supposons

– $S_i \subseteq \mathbb{R}^K$, K entier, est un ensemble **compact** (fermé et borné)

– $u_i : S \longrightarrow \mathbb{R}$ est **continue** pour tout $i \in N$

Meilleures réponses pures du joueur i à s_{-i} :

$$\begin{aligned} \mathrm{MR}_i(s_{-i}) &= \arg\max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i}) \\ &= \{s_i \in S_i : u_i(s_i,\, s_{-i}) \geq u_i(s_i',\, s_{-i}),\ \forall\ s_i' \in S_i\} \end{aligned}$$

(non vide d'après le théorème de Weierstrass)

Définition équivalente de l'équilibre de Nash (point fixe) :

$$s_i^* \in \mathrm{MR}_i(s_{-i}^*), \quad \text{pour tout } i \in N$$

Existence d'un EN en stratégies pures

Supposons

– $S_i \subseteq \mathbb{R}^K$, K entier, est un ensemble **compact** (fermé et borné)

– $u_i : S \longrightarrow \mathbb{R}$ est **continue** pour tout $i \in N$

Meilleures réponses pures du joueur i à s_{-i} :

$$\begin{aligned}\mathrm{MR}_i(s_{-i}) &= \arg\max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i}) \\ &= \{s_i \in S_i : u_i(s_i,\, s_{-i}) \geq u_i(s_i',\, s_{-i}),\ \forall\ s_i' \in S_i\}\end{aligned}$$

(non vide d'après le théorème de Weierstrass)

Définition équivalente de l'équilibre de Nash (point fixe) :

$$s_i^* \in \mathrm{MR}_i(s_{-i}^*), \quad \text{pour tout } i \in N$$

$$\Leftrightarrow$$

Existence d'un EN en stratégies pures

Supposons

– $S_i \subseteq \mathbb{R}^K$, K entier, est un ensemble **compact** (fermé et borné)

– $u_i : S \longrightarrow \mathbb{R}$ est **continue** pour tout $i \in N$

Meilleures réponses pures du joueur i à s_{-i} :

$$\begin{aligned}\mathrm{MR}_i(s_{-i}) &= \arg\max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i}) \\ &= \{s_i \in S_i : u_i(s_i,\, s_{-i}) \geq u_i(s_i',\, s_{-i}),\ \forall\, s_i' \in S_i\}\end{aligned}$$

(non vide d'après le théorème de Weierstrass)

Définition équivalente de l'équilibre de Nash (point fixe) :

$$\begin{aligned} & s_i^* \in \mathrm{MR}_i(s_{-i}^*), \quad \text{pour tout } i \in N \\ \Leftrightarrow \quad & s^* \in \mathrm{MR}(s^*) \quad \text{(forme matricielle)}\end{aligned}$$

Existence d'un EN en stratégies pures

Supposons

- $S_i \subseteq \mathbb{R}^K$, K entier, est un ensemble **compact** (fermé et borné)
- $u_i : S \to \mathbb{R}$ est **continue** pour tout $i \in N$

Meilleures réponses pures du joueur i à s_{-i} :

$$\begin{aligned}\mathrm{MR}_i(s_{-i}) &= \arg\max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i}) \\ &= \{s_i \in S_i : u_i(s_i,\, s_{-i}) \geq u_i(s_i',\, s_{-i}),\ \forall\ s_i' \in S_i\}\end{aligned}$$

(non vide d'après le théorème de Weierstrass)

Définition équivalente de l'équilibre de Nash (point fixe) :

$$\begin{aligned} & s_i^* \in \mathrm{MR}_i(s_{-i}^*), \quad \text{pour tout } i \in N \\ \Leftrightarrow \quad & s^* \in \mathrm{MR}(s^*) \quad \text{(forme matricielle)}\end{aligned}$$

où $\mathrm{MR} : S \twoheadrightarrow S$ est définie par $\mathrm{MR}(s) = \mathrm{MR}_1(s_{-1}) \times \cdots \times \mathrm{MR}_n(s_{-n})$

Illustration.

Illustration.

	G	C	D
H	$1\ ,\ 2^*$	$2^*,\ 1$	$1^*,\ 0$
M	$2^*,\ 1^*$	$0\ ,\ 1^*$	$0\ ,\ 0$
B	$0\ ,\ 1$	$0\ ,\ 0$	$1^*,\ 2^*$

Illustration.

	G	C	D
H	$1\ ,\ 2^*$	$2^*,\ 1$	$1^*,\ 0$
M	$2^*,\ 1^*$	$0\ ,\ 1^*$	$0\ ,\ 0$
B	$0\ ,\ 1$	$0\ ,\ 0$	$1^*,\ 2^*$

$*$ $\leftrightarrow$ stratégie qui est une meilleure réponse à la stratégie de l'autre joueur

Illustration.

	G	C	D
H	$1\ ,\ 2^*$	$2^*,\ 1$	$1^*,\ 0$
M	$2^*,\ 1^*$	$0\ ,\ 1^*$	$0\ ,\ 0$
B	$0\ ,\ 1$	$0\ ,\ 0$	$1^*,\ 2^*$

$*$ $\leftrightarrow$ stratégie qui est une meilleure réponse à la stratégie de l'autre joueur

Deux $*$ $\leftrightarrow$ chaque joueur joue une meilleure réponse à la stratégie de l'autre

$\leftrightarrow$ équilibre de Nash (ici, (M, G) et (B, D))

Rappel. Soit K un entier positif

Rappel. Soit K un entier positif

Un ensemble $X \subseteq \mathbb{R}^K$ est convexe ssi pour tout $\alpha \in [0,1]$, si x, $x' \in X$ alors $\alpha\, x + (1-\alpha)\, x' \in X$

Rappel. Soit K un entier positif

Un ensemble $X \subseteq \mathbb{R}^K$ est convexe ssi pour tout $\alpha \in [0,1]$, si x, $x' \in X$ alors $\alpha\, x + (1-\alpha)\, x' \in X$

Une fonction $f : X \to \mathbb{R}$, où $X \subseteq \mathbb{R}^K$ est un ensemble convexe, est quasi-concave ssi pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{x \in X : f(x) \geq y\}$ est convexe

Rappel. Soit K un entier positif

Un ensemble $X \subseteq \mathbb{R}^K$ est convexe ssi pour tout $\alpha \in [0, 1]$, si x, $x' \in X$ alors $\alpha\, x + (1 - \alpha)\, x' \in X$

Une fonction $f : X \to \mathbb{R}$, où $X \subseteq \mathbb{R}^K$ est un ensemble convexe, est quasi-concave ssi pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{x \in X : f(x) \geq y\}$ est convexe

Théorème de point fixe de Kakutani (1941). Soit un ensemble $X \subseteq \mathbb{R}^m$ compact, convexe et non vide, et soit

$$\begin{aligned} f : X &\twoheadrightarrow X \\ x &\mapsto f(x) \subseteq X, \end{aligned}$$

une correspondance telle que

Rappel. Soit K un entier positif

Un ensemble $X \subseteq \mathbb{R}^K$ est convexe ssi pour tout $\alpha \in [0,1]$, si x, $x' \in X$ alors $\alpha\, x + (1-\alpha)\, x' \in X$

Une fonction $f : X \to \mathbb{R}$, où $X \subseteq \mathbb{R}^K$ est un ensemble convexe, est quasi-concave ssi pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{x \in X : f(x) \geq y\}$ est convexe

Théorème de point fixe de Kakutani (1941). Soit un ensemble $X \subseteq \mathbb{R}^m$ compact, convexe et non vide, et soit

$$\begin{aligned} f : X &\twoheadrightarrow X \\ x &\mapsto f(x) \subseteq X, \end{aligned}$$

une correspondance telle que

– pour tout $x \in X$ l'ensemble $f(x)$ est non vide et convexe ;

Rappel. Soit K un entier positif

Un ensemble $X \subseteq \mathbb{R}^K$ est convexe ssi pour tout $\alpha \in [0,1]$, si x, $x' \in X$ alors $\alpha\, x + (1-\alpha)\, x' \in X$

Une fonction $f : X \to \mathbb{R}$, où $X \subseteq \mathbb{R}^K$ est un ensemble convexe, est quasi-concave ssi pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{x \in X : f(x) \geq y\}$ est convexe

Théorème de point fixe de Kakutani (1941). Soit un ensemble $X \subseteq \mathbb{R}^m$ compact, convexe et non vide, et soit

$$\begin{aligned} f : X &\twoheadrightarrow X \\ x &\mapsto f(x) \subseteq X, \end{aligned}$$

une correspondance telle que

- pour tout $x \in X$ l'ensemble $f(x)$ est non vide et convexe ;
- le graphe de f est fermé, c'est-à-dire que quelles que soient les suites $\{x^n\}$ et $\{y^n\}$ telles que $x^n \to x$, $y^n \to y$ et $y^n \in f(x^n)$ on a $y \in f(x)$

Rappel. Soit K un entier positif

Un ensemble $X \subseteq \mathbb{R}^K$ est convexe ssi pour tout $\alpha \in [0,1]$, si x, $x' \in X$ alors $\alpha\, x + (1-\alpha)\, x' \in X$

Une fonction $f : X \to \mathbb{R}$, où $X \subseteq \mathbb{R}^K$ est un ensemble convexe, est quasi-concave ssi pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{x \in X : f(x) \geq y\}$ est convexe

Théorème de point fixe de Kakutani (1941). Soit un ensemble $X \subseteq \mathbb{R}^m$ compact, convexe et non vide, et soit

$$\begin{aligned} f : X &\twoheadrightarrow X \\ x &\mapsto f(x) \subseteq X, \end{aligned}$$

une correspondance telle que

– pour tout $x \in X$ l'ensemble $f(x)$ est non vide et convexe ;

– le graphe de f est fermé, c'est-à-dire que quelles que soient les suites $\{x^n\}$ et $\{y^n\}$ telles que $x^n \to x$, $y^n \to y$ et $y^n \in f(x^n)$ on a $y \in f(x)$

Alors, f a un point fixe : il existe $x^* \in X$ tel que $x^* \in f(x^*)$

Nécessité des conditions du théorème :

Nécessité des conditions du théorème :

(i) X compact

Nécessité des conditions du théorème :

(i) X compact

➥ $X = \mathbb{R}$, $f(x) = \{x + 1\}$

Nécessité des conditions du théorème :

(i) X compact

➥ $X = \mathbb{R}$, $f(x) = \{x + 1\}$

(ii) X convexe

Nécessité des conditions du théorème :

(i) X compact

➥ $X = \mathbb{R}$, $f(x) = \{x + 1\}$

(ii) X convexe

➥ X est un cercle, f une rotation 90° sur ce cercle

Nécessité des conditions du théorème :

(i) X compact

➥ $X = \mathbb{R}$, $f(x) = \{x + 1\}$

(ii) X convexe

➥ X est un cercle, f une rotation 90° sur ce cercle

(iii) $f(x)$ convexe pour tout $x \in X$

Nécessité des conditions du théorème :

(i) X compact

➥ $X = \mathbb{R}$, $f(x) = \{x + 1\}$

(ii) X convexe

➥ X est un cercle, f une rotation 90° sur ce cercle

(iii) $f(x)$ convexe pour tout $x \in X$

➥ $X = [0, 1]$ et $f(x) = \begin{cases} \{1\} & \text{si } x < 1/2 \\ \{0, 1\} & \text{si } x = 1/2 \\ \{0\} & \text{si } x > 1/2 \end{cases}$

Nécessité des conditions du théorème :

(i) X compact

➥ $X = \mathbb{R}$, $f(x) = \{x + 1\}$

(ii) X convexe

➥ X est un cercle, f une rotation $90°$ sur ce cercle

(iii) $f(x)$ convexe pour tout $x \in X$

➥ $X = [0, 1]$ et $f(x) = \begin{cases} \{1\} & \text{si } x < 1/2 \\ \{0, 1\} & \text{si } x = 1/2 \\ \{0\} & \text{si } x > 1/2 \end{cases}$

(iv) graphe de f fermé

Nécessité des conditions du théorème :

(i) X compact

➥ $X = \mathbb{R}$, $f(x) = \{x + 1\}$

(ii) X convexe

➥ X est un cercle, f une rotation 90° sur ce cercle

(iii) $f(x)$ convexe pour tout $x \in X$

➥ $X = [0, 1]$ et $f(x) = \begin{cases} \{1\} & \text{si } x < 1/2 \\ \{0, 1\} & \text{si } x = 1/2 \\ \{0\} & \text{si } x > 1/2 \end{cases}$

(iv) graphe de f fermé

➥ $X = [0, 1]$, $f(x) = \{1\}$ si $x < 1$ et $f(1) = \{0\}$

Théorème d'existence d'un EN

Théorème d'existence d'un EN

Si le jeu $\langle N,\ (S_i)_{i\in N},\ (u_i)_{i\in N}\rangle$ *vérifie les conditions suivantes pour tout* $i \in N$

Théorème d'existence d'un EN

Si le jeu $\langle N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\rangle$ *vérifie les conditions suivantes pour tout* $i \in N$

– *l'ensemble des stratégies* S_i *est un sous espace Euclidien (*$S_i \subseteq \mathbb{R}^K$*,* K *entier) non vide, compact et convexe*

Théorème d'existence d'un EN

Si le jeu $\langle N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N} \rangle$ *vérifie les conditions suivantes pour tout* $i \in N$

- *l'ensemble des stratégies* S_i *est un sous espace Euclidien (*$S_i \subseteq \mathbb{R}^K$*,* K *entier) non vide, compact et convexe*
- *la fonction d'utilité* $u_i : S \rightarrow \mathbb{R}$ *est continue*

Théorème d'existence d'un EN

Si le jeu $\langle N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\rangle$ *vérifie les conditions suivantes pour tout* $i \in N$

- *l'ensemble des stratégies* S_i *est un sous espace Euclidien (*$S_i \subseteq \mathbb{R}^K$*,* K *entier) non vide, compact et convexe*
- *la fonction d'utilité* $u_i : S \to \mathbb{R}$ *est continue*
- *la fonction* $u_i(\cdot, s_{-i}) : S_i \to \mathbb{R}$ *est quasi-concave pour tout* $s_{-i} \in S_{-i}$

Théorème d'existence d'un EN

Si le jeu $\langle N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\rangle$ *vérifie les conditions suivantes pour tout* $i \in N$

- *l'ensemble des stratégies* S_i *est un sous espace Euclidien (*$S_i \subseteq \mathbb{R}^K$*,* K *entier) non vide, compact et convexe*
- *la fonction d'utilité* $u_i : S \longrightarrow \mathbb{R}$ *est continue*
- *la fonction* $u_i(\cdot, s_{-i}) : S_i \longrightarrow \mathbb{R}$ *est quasi-concave pour tout* $s_{-i} \in S_{-i}$

alors il existe un équilibre de Nash en stratégies pures

Théorème d'existence d'un EN

Si le jeu $\langle N,\, (S_i)_{i\in N},\, (u_i)_{i\in N}\rangle$ *vérifie les conditions suivantes pour tout* $i \in N$

– *l'ensemble des stratégies* S_i *est un sous espace Euclidien* ($S_i \subseteq \mathbb{R}^K$, K *entier) non vide, compact et convexe*

– *la fonction d'utilité* $u_i : S \longrightarrow \mathbb{R}$ *est continue*

– *la fonction* $u_i(\cdot, s_{-i}) : S_i \longrightarrow \mathbb{R}$ *est quasi-concave pour tout* $s_{-i} \in S_{-i}$

alors il existe un équilibre de Nash en stratégies pures

Preuve. Il suffit de démontrer que le théorème de point fixe de Kakutani s'applique à la correspondance de meilleure réponse $\mathrm{MR} : S \twoheadrightarrow S$

Théorème d'existence d'un EN

Si le jeu $\langle N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\rangle$ *vérifie les conditions suivantes pour tout* $i \in N$

– *l'ensemble des stratégies* S_i *est un sous espace Euclidien (*$S_i \subseteq \mathbb{R}^K$*,* K *entier) non vide, compact et convexe*

– *la fonction d'utilité* $u_i : S \longrightarrow \mathbb{R}$ *est continue*

– *la fonction* $u_i(\cdot, s_{-i}) : S_i \longrightarrow \mathbb{R}$ *est quasi-concave pour tout* $s_{-i} \in S_{-i}$

alors il existe un équilibre de Nash en stratégies pures

Preuve. Il suffit de démontrer que le théorème de point fixe de Kakutani s'applique à la correspondance de meilleure réponse $\mathrm{MR} : S \twoheadrightarrow S$

– $S \subseteq \mathbb{R}^{n\times K}$ compact, convexe et non vide

Théorème d'existence d'un EN

Si le jeu $\langle N,\, (S_i)_{i\in N},\, (u_i)_{i\in N}\rangle$ *vérifie les conditions suivantes pour tout* $i \in N$

– *l'ensemble des stratégies* S_i *est un sous espace Euclidien* ($S_i \subseteq \mathbb{R}^K$, K *entier) non vide, compact et convexe*

– *la fonction d'utilité* $u_i : S \longrightarrow \mathbb{R}$ *est continue*

– *la fonction* $u_i(\cdot, s_{-i}) : S_i \longrightarrow \mathbb{R}$ *est quasi-concave pour tout* $s_{-i} \in S_{-i}$

alors il existe un équilibre de Nash en stratégies pures

Preuve. Il suffit de démontrer que le théorème de point fixe de Kakutani s'applique à la correspondance de meilleure réponse $\mathrm{MR} : S \twoheadrightarrow S$

– $S \subseteq \mathbb{R}^{n\times K}$ compact, convexe et non vide

– $\mathrm{MR}(s)$ est non vide

Théorème d'existence d'un EN

Si le jeu $\langle N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\rangle$ *vérifie les conditions suivantes pour tout* $i \in N$

- *l'ensemble des stratégies* S_i *est un sous espace Euclidien* ($S_i \subseteq \mathbb{R}^K$, K *entier) non vide, compact et convexe*
- *la fonction d'utilité* $u_i : S \longrightarrow \mathbb{R}$ *est continue*
- *la fonction* $u_i(\cdot, s_{-i}) : S_i \longrightarrow \mathbb{R}$ *est quasi-concave pour tout* $s_{-i} \in S_{-i}$

alors il existe un équilibre de Nash en stratégies pures

Preuve. Il suffit de démontrer que le théorème de point fixe de Kakutani s'applique à la correspondance de meilleure réponse $\mathrm{MR} : S \twoheadrightarrow S$

- $S \subseteq \mathbb{R}^{n\times K}$ compact, convexe et non vide
- $\mathrm{MR}(s)$ est non vide
- $\mathrm{MR}_i(s_{-i})$ est convexe pour tout i car $u_i(\cdot, s_{-i}) : S_i \longrightarrow \mathbb{R}$ est quasi-concave (par définition)

Théorème d'existence d'un EN

Si le jeu $\langle N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\rangle$ *vérifie les conditions suivantes pour tout* $i \in N$

– *l'ensemble des stratégies* S_i *est un sous espace Euclidien (*$S_i \subseteq \mathbb{R}^K$*,* K *entier) non vide, compact et convexe*

– *la fonction d'utilité* $u_i : S \longrightarrow \mathbb{R}$ *est continue*

– *la fonction* $u_i(\cdot, s_{-i}) : S_i \longrightarrow \mathbb{R}$ *est quasi-concave pour tout* $s_{-i} \in S_{-i}$

alors il existe un équilibre de Nash en stratégies pures

Preuve. Il suffit de démontrer que le théorème de point fixe de Kakutani s'applique à la correspondance de meilleure réponse $\mathrm{MR} : S \twoheadrightarrow S$

– $S \subseteq \mathbb{R}^{n\times K}$ compact, convexe et non vide

– $\mathrm{MR}(s)$ est non vide

– $\mathrm{MR}_i(s_{-i})$ est convexe pour tout i car $u_i(\cdot, s_{-i}) : S_i \longrightarrow \mathbb{R}$ est quasi-concave (par définition)

– le graphe de MR est fermé car $u_i : S \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue pour tout i

Duopole de Cournot, suite

$$u_i(s_1, s_2) = s_i(-\theta_i - s_1 - s_2)$$

Existe-t-il un équilibre de Nash ?

Duopole de Cournot, suite

$$u_i(s_1, s_2) = s_i(-\theta_i - s_1 - s_2)$$

Existe-t-il un équilibre de Nash ? OUI car

Duopole de Cournot, suite

$$u_i(s_1, s_2) = s_i(-\theta_i - s_1 - s_2)$$

Existe-t-il un équilibre de Nash ? OUI car

– $S_1 = S_2 = [0, 1]$ non vides, compacts et convexes

Duopole de Cournot, suite

$$u_i(s_1, s_2) = s_i(-\theta_i - s_1 - s_2)$$

Existe-t-il un équilibre de Nash ? OUI car

- $S_1 = S_2 = [0, 1]$ non vides, compacts et convexes
- $u_i(s_i, s_{-i})$ continue par rapport à s

Duopole de Cournot, suite

$$u_i(s_1, s_2) = s_i(-\theta_i - s_1 - s_2)$$

Existe-t-il un équilibre de Nash ? OUI car

- $S_1 = S_2 = [0, 1]$ non vides, compacts et convexes
- $u_i(s_i, s_{-i})$ continue par rapport à s
- $u_i(s_i, s_{-i})$ concave par rapport à s_i ($\frac{\partial^2 u_i}{\partial {s_i}^2} < 0$) donc quasi-concave

Duopole de Cournot, suite

$$u_i(s_1, s_2) = s_i(-\theta_i - s_1 - s_2)$$

Existe-t-il un équilibre de Nash ? OUI car

- $S_1 = S_2 = [0, 1]$ non vides, compacts et convexes
- $u_i(s_i, s_{-i})$ continue par rapport à s
- $u_i(s_i, s_{-i})$ concave par rapport à s_i ($\frac{\partial^2 u_i}{\partial {s_i}^2} < 0$) donc quasi-concave

Meilleures réponses des firmes :

$$\mathrm{MR}_1(s_2) = \left\{ \frac{-\theta_1 - s_2}{2} \right\}$$

$$\mathrm{MR}_2(s_1) = \left\{ \frac{-\theta_2 - s_1}{2} \right\}$$

Duopole de Cournot, suite

$$u_i(s_1, s_2) = s_i(-\theta_i - s_1 - s_2)$$

Existe-t-il un équilibre de Nash ? OUI car

- $S_1 = S_2 = [0, 1]$ non vides, compacts et convexes
- $u_i(s_i, s_{-i})$ continue par rapport à s
- $u_i(s_i, s_{-i})$ concave par rapport à s_i ($\frac{\partial^2 u_i}{\partial {s_i}^2} < 0$) donc quasi-concave

Meilleures réponses des firmes :

$$\mathrm{MR}_1(s_2) = \left\{ \frac{-\theta_1 - s_2}{2} \right\}$$

$$\mathrm{MR}_2(s_1) = \left\{ \frac{-\theta_2 - s_1}{2} \right\}$$

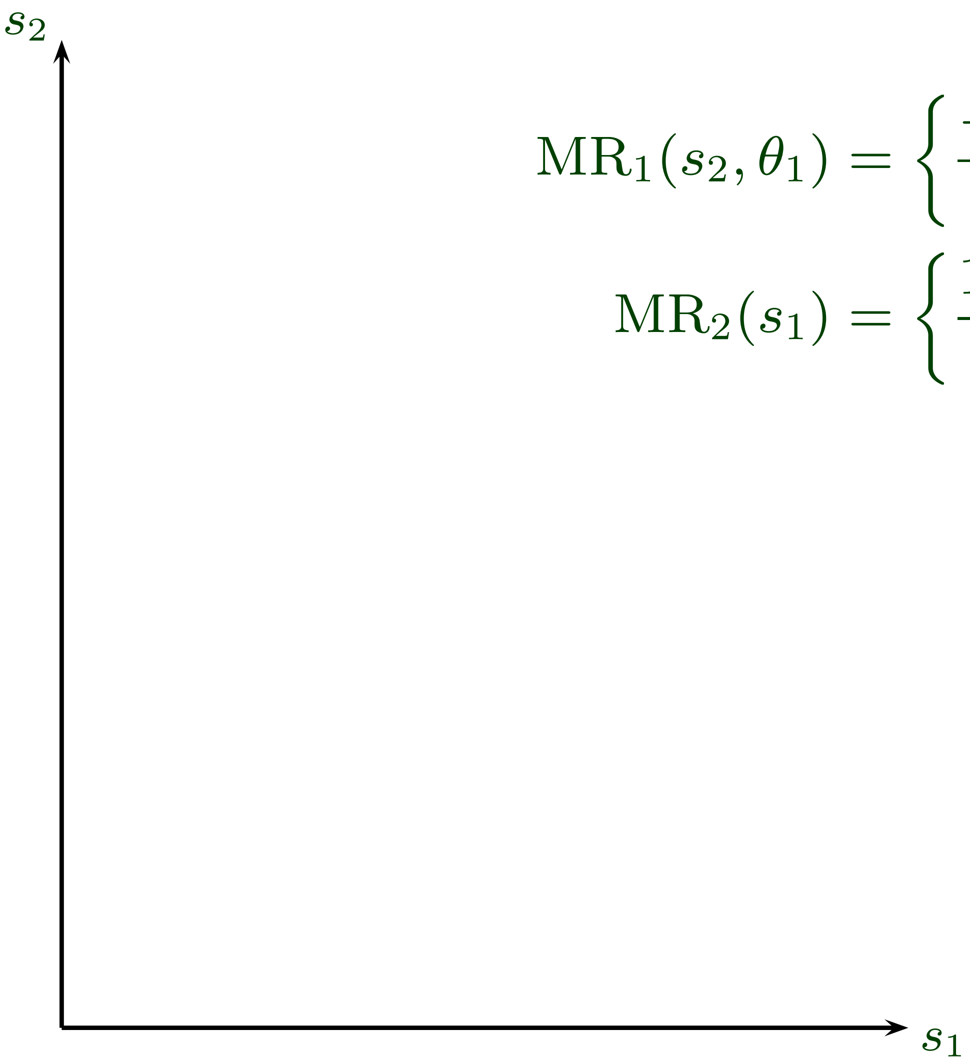
À l'équilibre on obtient donc

$$s_1^* = \frac{\theta_2 - 2\theta_1}{3}$$

$$s_2^* = \frac{\theta_1 - 2\theta_2}{3}$$

Représentation graphique de l'équilibre de Nash du duopole de Cournot en posant $\theta_2 = -1$, pour $\theta_1 = -(3/2)$, -1, et $-(1/2)$

Représentation graphique de l'équilibre de Nash du duopole de Cournot en posant $\theta_2 = -1$, pour $\theta_1 = -(3/2)$, -1, et $-(1/2)$



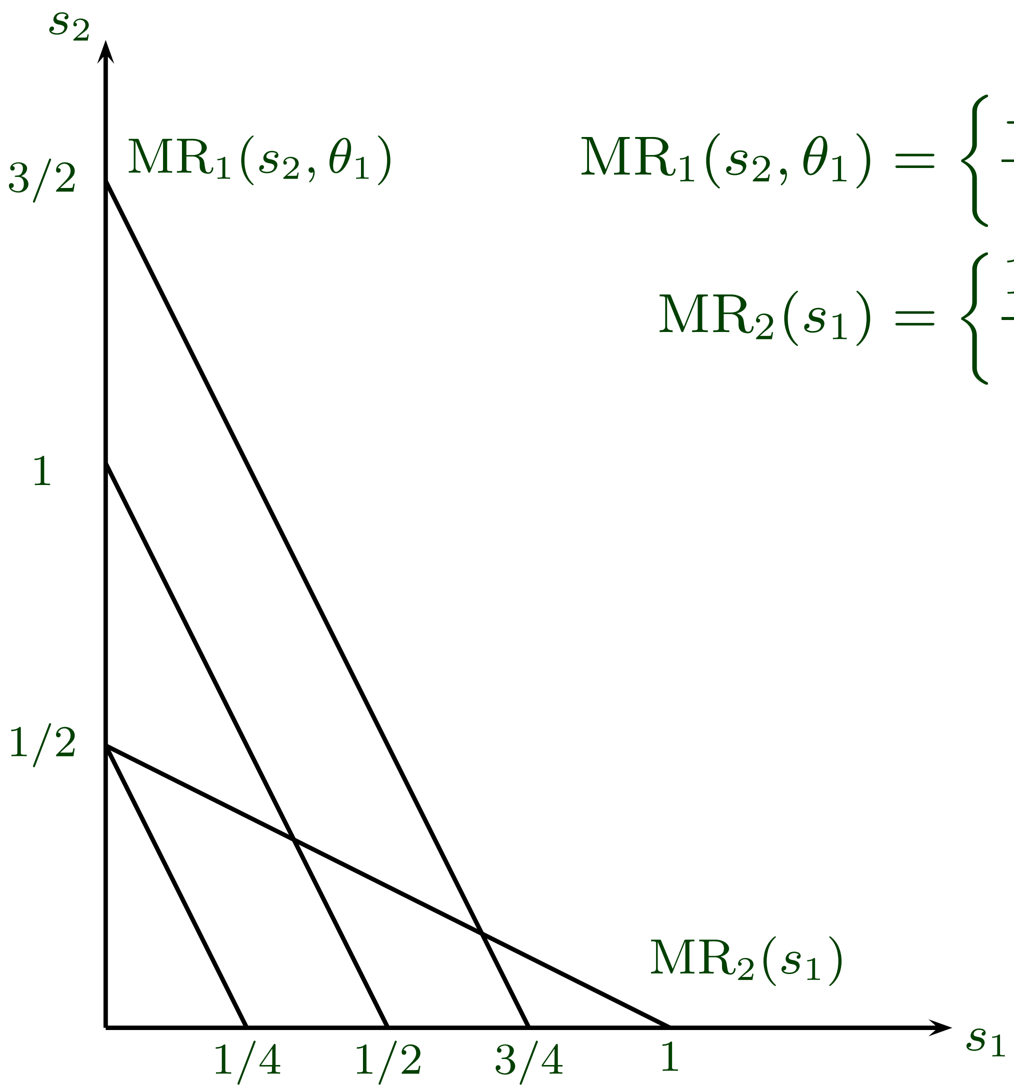
$$\mathrm{MR}_1(s_2, \theta_1) = \left\{ \frac{-\theta_1 - s_2}{2} \right\}$$

$$\mathrm{MR}_2(s_1) = \left\{ \frac{1 - s_1}{2} \right\}.$$

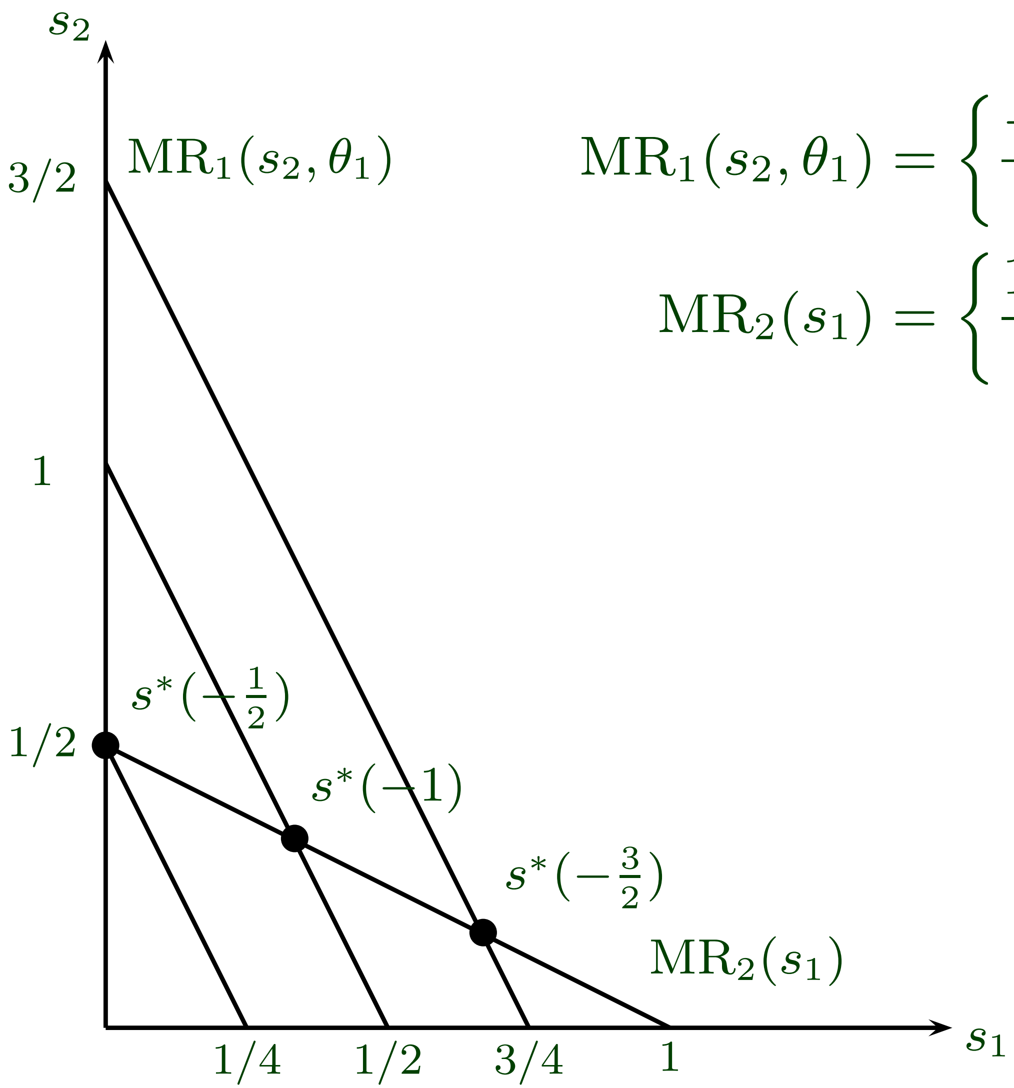
Représentation graphique de l'équilibre de Nash du duopole de Cournot en posant $\theta_2 = -1$, pour $\theta_1 = -(3/2)$, -1, et $-(1/2)$

$$\mathrm{MR}_1(s_2, \theta_1) = \left\{ \frac{-\theta_1 - s_2}{2} \right\}$$

$$\mathrm{MR}_2(s_1) = \left\{ \frac{1 - s_1}{2} \right\}.$$



Représentation graphique de l'équilibre de Nash du duopole de Cournot en posant $\theta_2 = -1$, pour $\theta_1 = -(3/2)$, -1, et $-(1/2)$



$$\mathrm{MR}_1(s_2, \theta_1) = \left\{ \frac{-\theta_1 - s_2}{2} \right\}$$

$$\mathrm{MR}_2(s_1) = \left\{ \frac{1 - s_1}{2} \right\}.$$

Jeux symétriques

Jeux symétriques

Définition. Un jeu à deux joueurs est un jeu symétrique si $S_1 = S_2 = A$ et $u_1(a,b) = u_2(b,a)$ pour tout a, $b \in A$

Jeux symétriques

Définition. Un jeu à deux joueurs est un jeu symétrique si $S_1 = S_2 = A$ et $u_1(a,b) = u_2(b,a)$ pour tout a, $b \in A$

Exemple. Duopole de Cournot précédent si les firmes ont la même fonction de coût. Dans ce cas, l'équilibre de Nash est symétrique : $s_1^* = s_2^* = -\frac{\theta}{3}$

Jeux symétriques

Définition. Un jeu à deux joueurs est un jeu symétrique si $S_1 = S_2 = A$ et $u_1(a, b) = u_2(b, a)$ pour tout a, $b \in A$

Exemple. Duopole de Cournot précédent si les firmes ont la même fonction de coût. Dans ce cas, l'équilibre de Nash est symétrique : $s_1^* = s_2^* = -\frac{\theta}{3}$

Proposition.
Si un jeu symétrique vérifie les hypothèses du théorème d'existence, alors ce jeu admet un équilibre de Nash en stratégies pures qui est symétrique

Jeux symétriques

Définition. Un jeu à deux joueurs est un jeu symétrique si $S_1 = S_2 = A$ et $u_1(a,b) = u_2(b,a)$ pour tout a, $b \in A$

Exemple. Duopole de Cournot précédent si les firmes ont la même fonction de coût. Dans ce cas, l'équilibre de Nash est symétrique : $s_1^* = s_2^* = -\frac{\theta}{3}$

Proposition.
Si un jeu symétrique vérifie les hypothèses du théorème d'existence, alors ce jeu admet un équilibre de Nash en stratégies pures qui est symétrique

Preuve. Si le jeu est symétrique alors on a clairement $\mathrm{MR}_1(a) = \mathrm{MR}_2(a) = f(a)$ pour tout $a \in A$. Comme $f : A \twoheadrightarrow A$ vérifie les conditions du théorème de Kakutani, il existe a^* t.q. $a^* \in f(a^*)$. Le profil de stratégies pures (a^*, a^*) est donc un équilibre de Nash car a^* est une meilleure réponse à a^* pour les deux joueurs ($a^* \in \mathrm{MR}_i(a^*)$, $i = 1$, 2) □

Jeux symétriques

Définition. Un jeu à deux joueurs est un jeu symétrique si $S_1 = S_2 = A$ et $u_1(a,b) = u_2(b,a)$ pour tout a, $b \in A$

Exemple. Duopole de Cournot précédent si les firmes ont la même fonction de coût. Dans ce cas, l'équilibre de Nash est symétrique : $s_1^* = s_2^* = -\frac{\theta}{3}$

Proposition.
Si un jeu symétrique vérifie les hypothèses du théorème d'existence, alors ce jeu admet un équilibre de Nash en stratégies pures qui est symétrique

Preuve. Si le jeu est symétrique alors on a clairement $\mathrm{MR}_1(a) = \mathrm{MR}_2(a) = f(a)$ pour tout $a \in A$. Comme $f : A \twoheadrightarrow A$ vérifie les conditions du théorème de Kakutani, il existe a^* t.q. $a^* \in f(a^*)$. Le profil de stratégies pures (a^*, a^*) est donc un équilibre de Nash car a^* est une meilleure réponse à a^* pour les deux joueurs ($a^* \in \mathrm{MR}_i(a^*)$, $i = 1$, 2) □

Remarque. Tous les équilibres d'un jeu symétrique ne sont pas forcément symétriques (voir le jeu de la poule mouillée)

Duopole de Bertrand

Duopole de Bertrand

- Compétition entre deux firmes par les prix

Duopole de Bertrand

- Compétition entre deux firmes par les prix
- Les firmes décident simultanément d'un prix de vente du bien

Duopole de Bertrand

– Compétition entre deux firmes par les prix
– Les firmes décident simultanément d'un prix de vente du bien
– Les consommateurs (une unité en tout) achètent à la firme au prix le plus bas

Duopole de Bertrand

- Compétition entre deux firmes par les prix
- Les firmes décident simultanément d'un prix de vente du bien
- Les consommateurs (une unité en tout) achètent à la firme au prix le plus bas

Forme normale du jeu :

Duopole de Bertrand

- Compétition entre deux firmes par les prix
- Les firmes décident simultanément d'un prix de vente du bien
- Les consommateurs (une unité en tout) achètent à la firme au prix le plus bas

Forme normale du jeu :

- Joueurs : $N = \{1, 2\}$

Duopole de Bertrand

- Compétition entre deux firmes par les prix
- Les firmes décident simultanément d'un prix de vente du bien
- Les consommateurs (une unité en tout) achètent à la firme au prix le plus bas

Forme normale du jeu :

- Joueurs : $N = \{1, 2\}$
- Stratégies : $S_i = \mathbb{R}_+$

Duopole de Bertrand

- Compétition entre deux firmes par les prix
- Les firmes décident simultanément d'un prix de vente du bien
- Les consommateurs (une unité en tout) achètent à la firme au prix le plus bas

Forme normale du jeu :

- Joueurs : $N = \{1, 2\}$
- Stratégies : $S_i = \mathbb{R}_+$
- Utilités :

$$u_i(p_i, p_j) = \begin{cases} p_i - c, & \text{si } p_i < p_j \\ 0, & \text{si } p_i > p_j \\ (p_i - c)/2, & \text{si } p_i = p_j \end{cases}$$

Duopole de Bertrand

- Compétition entre deux firmes par les prix
- Les firmes décident simultanément d'un prix de vente du bien
- Les consommateurs (une unité en tout) achètent à la firme au prix le plus bas

Forme normale du jeu :

- Joueurs : $N = \{1, 2\}$
- Stratégies : $S_i = \mathbb{R}_+$
- Utilités :

$$u_i(p_i, p_j) = \begin{cases} p_i - c, & \text{si } p_i < p_j \\ 0, & \text{si } p_i > p_j \\ (p_i - c)/2, & \text{si } p_i = p_j \end{cases}$$

Le théorème d'existence d'un équilibre de Nash ne s'applique pas (u_i discontinue)

Duopole de Bertrand

- Compétition entre deux firmes par les prix
- Les firmes décident simultanément d'un prix de vente du bien
- Les consommateurs (une unité en tout) achètent à la firme au prix le plus bas

Forme normale du jeu :

- Joueurs : $N = \{1, 2\}$
- Stratégies : $S_i = \mathbb{R}_+$
- Utilités :

$$u_i(p_i, p_j) = \begin{cases} p_i - c, & \text{si } p_i < p_j \\ 0, & \text{si } p_i > p_j \\ (p_i - c)/2, & \text{si } p_i = p_j \end{cases}$$

Le théorème d'existence d'un équilibre de Nash ne s'applique pas (u_i discontinue)

Il existe cependant un unique équilibre de Nash : $p_1^* = p_2^* = c$ (prix de concurrence parfaite, profits nuls)

Références

KAKUTANI, S. (1941) : "A Generalization of Brouwer's Fixed Point Theorem," Duke Mathematical Journal, 8, 457–459.