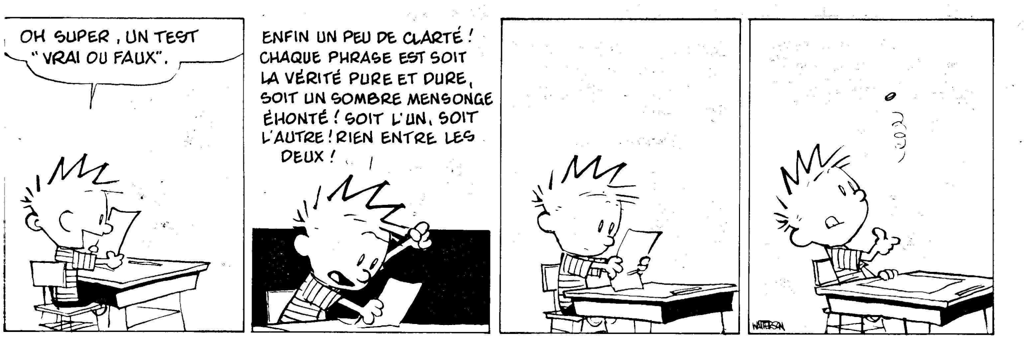
Extension mixte d'un jeu

(22 juillet 2008)

1/ 

Stratégie pure (action) : souvent insuffisante pour décrire le comportement d'un joueur dans un jeu

Comment écrire formellement qu'un joueur a tendance à jouer **plus souvent** pierre que ciseaux ?

➔ Meilleure réponse de l'autre joueur : jouer plus souvent feuille

➔ Le premier joueur devrait donc jouer plus souvent ciseaux, . . .

➥ Situation stable ?

2/ ☞ Il faut définir des **stratégies aléatoires**

- ➢ ruse
- ➢ secret
- ➢ bluff

Ex : tire au but, poker, feuille-pierre-ciseaux, stratégies militaires, inspections des impôts . . . image

Définition. Une **stratégie mixte** pour le joueur i est une distribution de probabilité sur l'ensemble S_i des stratégies pures du joueur i

On note

$$\Sigma_i = \Delta(S_i) \equiv \{p \in \mathbb{R}^{|S_i|} : p_k \geq 0, \ \sum_k p_k = 1\}$$

l'ensemble des stratégies mixtes du joueur i, et $\sigma_i = (\sigma_i(s_i))_{s_i \in S_i}$ un élément de Σ_i

Une stratégie mixte σ_i est dite *complètement mixte* si $\sigma_i(s_i) > 0$ pour tout $s_i \in S_i$

Une stratégie mixte σ_i est dite *non dégénérée* si elle n'assigne pas une probabilité
3/ égale à un à une des stratégie pures

Hypothèses de VNM sur les préférences $\Rightarrow$ un profil de stratégies mixtes $\sigma = (\sigma_i)_{i \in N}$ est évalué par le joueur i à l'aide de l'utilité espérée $U_i : \Sigma \to \mathbb{R}$

$$U_i(\sigma) = \sum_{s \in S} \sigma(s)\, u_i(s)$$

où $\sigma(s)$ est la probabilité que le profil de stratégies pures s soit joué étant donné σ

Stratégies indépendantes $\Rightarrow$ $\sigma(s) = \prod_{i \in N} \sigma_i(s_i)$

Exemple. Jeu à deux joueurs et deux actions : $S_1 = S_2 = \{a, b\}$, $p = \sigma_1(a)$, $q = \sigma_2(a)$

	a	b	
a	$p\,q$	$p\,(1-q)$	p
b	$(1-p)\,q$	$(1-p)\,(1-q)$	$1-p$
	q	$1-q$	

$$U_i(\sigma) = \ p\,q\,u_i(a,\, a) + p\,(1-q)\,u_i(a,\, b) + (1-p)\,q\,u_i(b,\, a) + (1-p)\,(1-q)\,u_i(b,\, b)$$

4/ **Remarques.**

– $U_i(\sigma)$ est un polynôme

– $U_i(\sigma)$ est multilinéaire (linéaire en σ_k à σ_{-k} fixé pour tout k) :

$$U_i(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = \sum_{(s_1, \ldots, s_n) \in S} \sigma_1(s_1) \times \ldots \times \sigma_n(s_n) u_i(s_1, \ldots, s_n)$$

donc en particulier
- continue en σ
- quasi-concave par rapport à σ_i

Le jeu sous forme normale $\langle N,\, (\Sigma_i)_i,\, (U_i)_i\rangle$ est appelé **extension mixte** du jeu sous forme normale $\langle N,\, (S_i)_i,\, (u_i)_i\rangle$

Dans la suite "$u_i = U_i$"

➥ $u_i(s_i,\, \sigma_{-i})$ = utilité espérée du joueur i lorsqu'il joue la stratégie pure s_i et lorsque les autres joueurs jouent le profil de stratégies mixtes σ_{-i}

Définition. Un **équilibre de Nash en stratégies mixtes** du jeu sous forme normale

5/

$$\langle N,\, (S_i)_i,\, (u_i)_i\rangle$$

est un équilibre de Nash en stratégies pures de l'extension mixte de ce jeu

c'est-à-dire, un profil de stratégies $\sigma^* \in \Sigma$ tel que

$$u_i(\sigma_i^*,\, \sigma_{-i}^*) \geq u_i(\sigma_i,\, \sigma_{-i}^*), \quad \forall\, \sigma_i \in \Sigma_i,\ \forall\, i \in N$$

Proposition. *L'ensemble des équilibres de Nash en stratégies pures est un sous ensemble de l'ensemble des équilibres de Nash en stratégies mixtes*

Preuve. Un équilibre de Nash en stratégies pures est un profil de stratégies mixtes dégénéré. Ce profil de stratégies est un équilibre de Nash en stratégies mixtes car, d'après la multilinéarité de la fonction d'utilité espérée on a
$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*)\ \forall\, s_i \in S_i \Rightarrow u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(\sigma_i, s_{-i}^*)\ \forall\, \sigma_i \in \Sigma_i$ □

6/

Support de la stratégie mixte σ_i :

$$\text{supp}[\sigma_i] = \{s_i \in S_i : \sigma_i(s_i) > 0\}$$

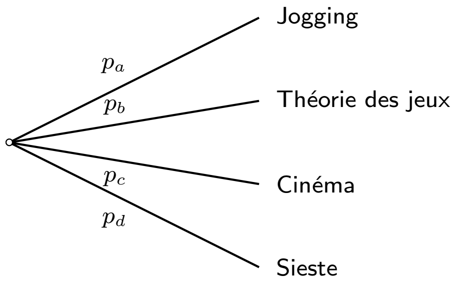
= toutes les actions jouées avec une probabilité strictement positive par le joueur i

Illustration : décision individuelle

Choisir entre $a =$ "faire un jogging", $b =$ "faire des exercices de théorie des jeux"
$c =$ "aller au cinéma", $d =$ "faire une sieste"

$\sigma_i = (p_a, p_b, p_c, p_d)$: Stratégie du décideur

$\Rightarrow$ Loterie



7/

Le décideur joue $\sigma_i = (\frac{5}{6}, \frac{1}{6}, 0, 0)$

$$\Rightarrow \text{supp}[\sigma_i] = \{a, b\}$$

Pour tout (p_a, p_b, p_c, p_d),

$$\frac{5}{6}u_i(a) + \frac{1}{6}u_i(b) \geq p_a\, u_i(a) + p_b\, u_i(b) + p_c\, u_i(c) + p_d\, u_i(d)$$

8/

$$\Leftrightarrow \quad u_i(a) = u_i(b) \geq \begin{cases} u_i(c) \\ u_i(d) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ si le décideur "joue aux dés" pour décider entre les actions a et b, alors il préfère a et b à toutes les autres actions et il est indifférent entre a et b

Proposition. *Un profil de stratégies* $\sigma^* \in \Sigma$ *est un* équilibre de Nash en stratégies mixtes *d'un jeu sous forme normale fini si et seulement si pour tout* $i \in N$

$$\begin{aligned} & u_i(s_i,\, \sigma^*_{-i}) = u_i(s'_i,\, \sigma^*_{-i}), \quad \forall\, s_i,\, s'_i \in \operatorname{supp}[\sigma^*_i] \\ \textit{et} \quad & u_i(s_i,\, \sigma^*_{-i}) \geq u_i(s''_i,\, \sigma^*_{-i}), \quad \forall\, s_i \in \operatorname{supp}[\sigma^*_i],\ s''_i \in S_i \end{aligned}$$

9/ *Preuve.* L'équivalence provient directement de la multilinéarité de la fonction d'utilité espérée :

$$u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i)\, u_i(s_i, \sigma_{-i})$$

En particulier, $\sigma_i \in \mathrm{MR}_i(\sigma_{-i})$ si et seulement si $s_i \in \mathrm{MR}_i(\sigma_{-i})$ pour tout $s_i \in \operatorname{supp}[\sigma_i]$. Autrement dit, on a toujours $\max_{\sigma_i \in \Sigma_i} u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, \sigma_{-i})$ □

✍ Vérifiez et expliquez pourquoi dans le jeu suivant la paire de stratégies indiquée, $(3/4, 0, 1/4)$ pour le joueur 1 et $(0, 1/3, 2/3)$ pour le joueur 2, est un équilibre de Nash (les points indiquent des utilités quelconques sans importance)

	G (0)	C (1/3)	D (2/3)
H (3/4)	$(\cdot, 2)$	$(3, 3)$	$(1, 1)$
M (0)	$(\cdot, \cdot)$	$(0, \cdot)$	$(2, \cdot)$
10/ B (1/4)	$(\cdot, 4)$	$(5, 1)$	$(0, 7)$

Proposition. (Théorème de Nash) *Tout jeu sous forme normale fini possède au moins un équilibre de Nash en stratégies mixtes*

Preuve. Ce résultat est un corollaire du théorème d'existence d'un EN en stratégies pures puisque l'extension mixte d'un jeu fini vérifie les propriétés demandées :

➢ pour tout i, l'ensemble des stratégies $\Sigma_i \subseteq \mathbb{R}^{|S_i|}$ est non vide, compact et convexe (c'est le simplexe de dimension $|S_i|$)

11/ ➢ la fonction $u_i : \Sigma \to \mathbb{R}$ est multilinéaire, donc $u_i(\sigma)$ est continue en σ et quasi-concave en σ_i. □

Proposition. *Tout jeu fini symétrique admet un équilibre de Nash en stratégies mixtes qui est symétrique*

Preuve. Directement de la proposition concernant l'existence d'un EN en stratégies pures symétrique □

Exemples

Dilemme des prisonniers.

	D	C
D	$(1,1)$	$(3,0)$
C	$(0,3)$	$(2,2)$

12/

Pas d'autre EN que (D, D) car D domine strictement C pour les deux joueurs

Jeu de coordination.

	a	b	
a	$(2,2)$	$(0,0)$	p
b	$(0,0)$	$(1,1)$	$1-p$
	q	$1-q$	

$p=\sigma_1(a)$: probabilité que le joueur 1 joue l'action a

$q=\sigma_2(a)$: probabilité que le joueur 2 joue l'action a

Si $p \in \{0,1\}$ on retrouve les deux EN en stratégies pures (a,a) et (b,b)

13/ Si $0<p<1$ alors le joueur 1 doit être indifférent

$$a \xrightarrow{1} u_1(a,\sigma_2)=2q+0(1-q)=2q$$

$$b \xrightarrow{1} u_1(b,\sigma_2)=0q+1(1-q)=1-q$$

donc $a \sim_1 b \Leftrightarrow 2q=1-q \Leftrightarrow q=\frac{1}{3}$

Le joueur 2 joue $\sigma_2(a)=q=1/3$ s'il est aussi indifférent. Par symétrie $p=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow$ EN en stratégies mixtes non dégénérées :

$$\sigma=\left(\begin{pmatrix}1/3\\2/3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1/3\\2/3\end{pmatrix}\right)$$

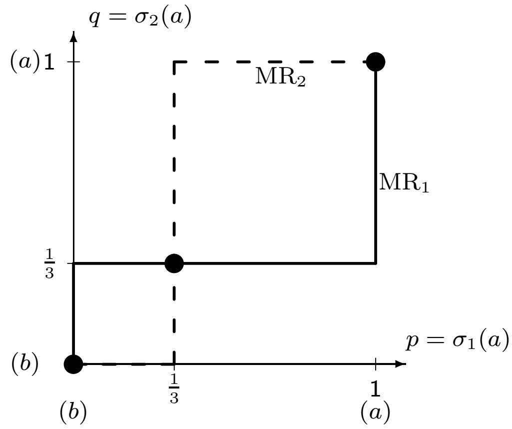
$\Rightarrow$ Trois équilibres de Nash, dont deux en stratégies pures

14/

Correspondances de meilleure réponse :

$$\mathrm{MR}_i(\sigma_j) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } \sigma_j(a) < \frac{1}{3} \\ [0,1] & \text{si } \sigma_j(a) = \frac{1}{3} \\ \{1\} & \text{si } \sigma_j(a) > \frac{1}{3} \end{cases}, \quad i = 1, 2,\ j \neq i$$

15/



Bataille des sexes.

	a	b	
a	$(3,2)$	$(1,1)$	p
b	$(0,0)$	$(2,3)$	$1-p$
	q	$1-q$	

$$a \xrightarrow{1} 3q + (1-q) = 1 + 2q$$
$$b \xrightarrow{1} 2(1-q) = 2 - 2q$$

16/

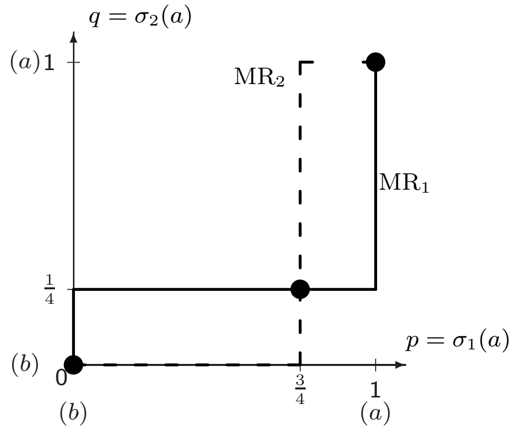
donc $a \sim_1 b \Leftrightarrow 1 + 2q = 2 - 2q \Leftrightarrow q = \frac{1}{4}$

$$a \xrightarrow{2} 2p$$
$$b \xrightarrow{2} p + 3(1-p) = 3 - 2p$$

donc $a \sim_2 b \Leftrightarrow p = \frac{3}{4}$

	a	b	
a	$(3,2)$	$(1,1)$	p
b	$(0,0)$	$(2,3)$	$1-p$
	q	$1-q$	

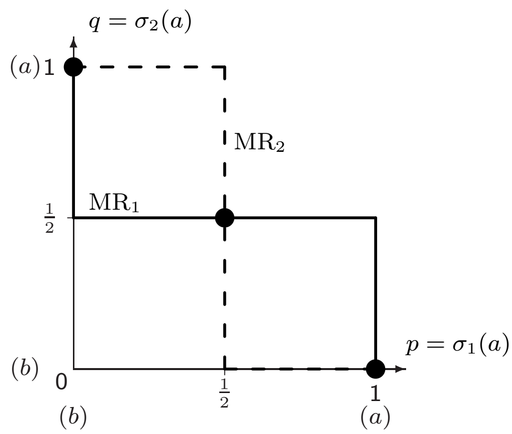
17/



Poule mouillée.

	a	b	
a	$(2,2)$	$(1,3)$	p
b	$(3,1)$	$(0,0)$	$1-p$
	q	$1-q$	

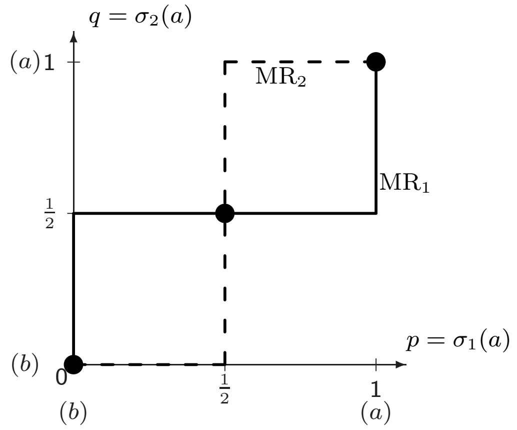
18/



Chasse au cerf.

	a	b	
a	$(3,3)$	$(0,2)$	p
b	$(2,0)$	$(1,1)$	$1-p$
	q	$1-q$	

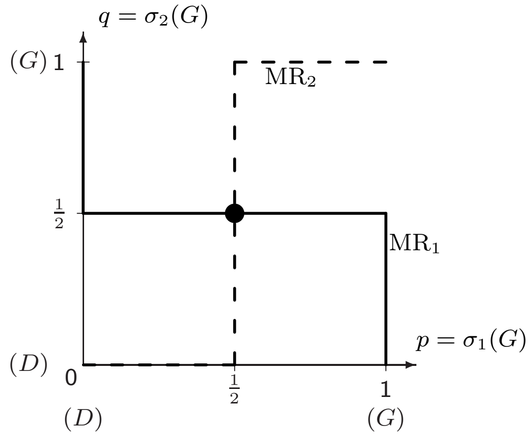
19/



Cache bouton.

	G	D	
G	$(-1,1)$	$(1,-1)$	p
D	$(1,-1)$	$(-1,1)$	$1-p$
	q	$1-q$	

20/



Feuille, pierre, ciseaux.

	F	P	C	
F	$(0,0)$	$(1,-1)$	$(-1,1)$	a
P	$(-1,1)$	$(0,0)$	$(1,-1)$	b
C	$(1,-1)$	$(-1,1)$	$(0,0)$	c
	p	q	r	

➢ EN en stratégies pures ? NON

➢ EN où un des joueurs joue uniquement deux actions avec des probabilités
21/ strictement positives ?

Par exemple, $p, q > 0$ et $r = 0 \Rightarrow$ Le joueur 1 ne joue pas P

$\Rightarrow$ Le joueur 2 ne joue pas F, contradiction

➢ EN où les joueurs jouent les 3 actions avec une probabilité strictement positive ?
OUI, car $\exists$ au moins un EN : $b - c = -a + c = a - b$ et $q - r = r - p = p - q$

$$\Rightarrow \quad a = b = c = 1/3 \quad \text{et} \quad p = q = r = 1/3$$

Le dilemme du volontaire

New York Times, vendredi 27 mars 1964 :

"*37 Who Saw Murder Didn't Call the Police*"

On a parfois observé que lorsque le nombre de témoins augmente, non seulement la probabilité que chaque individu intervienne diminue, mais également la probabilité qu'au moins une personne offre son assistance

22/ Trois explications ont été avancées :

- ➢ la diffusion de la responsabilité
- ➢ la peur d'une évaluation négative (déviation de la norme)
- ➢ l'influence sociale

☛ Toutes reposent sur l'impact du nombre de témoins sur les coûts ou les bénéfices espérés d'une intervention

23/

Une explication par la théorie des jeux.

- n joueurs (témoins)
- Deux actions : appeler la police (action A) ou ne rien faire (action N)
- Préférences : chaque joueur accorde une valeur v au fait que la police soit prévenue, et supporte un coût c s'il est amené à prévenir lui même la police, où

24/

$$v > c > 0$$

➥ n équilibres de Nash en stratégies pures (exactement un joueur appelle la police)

Mais coordination vers un de ces équilibres asymétriques difficile en pratique (sauf si communication ou joueurs hétérogènes)

Seul équilibre symétrique possible : en stratégies mixtes (non dégénérées)

$\sigma_i(A) = q \in (0,1)$: probabilité que le joueur i appelle la police, $i = 1, \ldots, n$

☞ Chaque joueur doit être indifférent entre les deux décisions

$$A \xrightarrow{i} v - c$$

$$N \xrightarrow{i} 0 \ \mathrm{Pr}(\text{personne n'appelle}) + v \ \mathrm{Pr}(\text{au moins une personne appelle})$$

25/

donc $A \sim_i N \ \Leftrightarrow \ v - c = v[1 - (1-q)^{n-1}]$

$$\Rightarrow \quad q = 1 - (c/v)^{1/n-1}$$

✔ $\mathrm{Pr}(1 \text{ personne donnée appelle}) = 1 - (c/v)^{1/n-1}$ décroît avec n

✔ $\mathrm{Pr}(1 \text{ personne au moins appelle}) = 1 - (1-q)^n = 1 - (c/v)^{n/n-1}$ décroît avec n !

Chercher tous les équilibres de Nash

	A	B	C
a	$3, 2$	$1, 1$	$0, 1.5$
b	$0, 0$	$2, 3$	$1, 2$

FIG. 1 – Une variante du jeu de la bataille des sexes

Deux équilibres en stratégies pures : (a, A) et (b, B)

26/

Comment trouver tous les autres équilibres de Nash ?

☞ Considérer tous les supports d'équilibre possibles pour le joueur 1, et dans chaque cas considérer tous les supports possibles du joueur 2

Notons p la probabilité que le joueur 1 choisisse l'action a

	A	B	C
a	$3,2$	$1,1$	$0,1.5$
b	$0,0$	$2,3$	$1,2$

1 joue a $(p=1)$ $\Rightarrow$ 2 n'est jamais indifférent $\Rightarrow$ seul équilibre possible (a,A)

1 joue b $(p=0)$ $\Rightarrow$ 2 n'est jamais indifférent $\Rightarrow$ seul équilibre possible (b,B)

1 joue a et b avec probabilités positives $(0<p<1)$

27/

$$\Rightarrow \quad A \xrightarrow{2} 2\,p$$
$$B \xrightarrow{2} 3-2\,p$$
$$C \xrightarrow{2} 2-p/2.$$

2 joue (uniquement) A, B ou C. Impossible

2 joue (uniquement) A et B avec probabilités positives. Impossible

2 joue (uniquement) B et C avec probabilités positives $\Rightarrow$ 1 dévie

2 joue (uniquement) A et C avec probabilités positives. OK,
$(\sigma_1,\sigma_2)=((4/5,1/5),\,(1/4,0,3/4))$

Stratégie prudente / maximin

Jeux finis à deux joueurs $\langle\{1,2\},(S_1,S_2),(u_1,u_2)\rangle$ image

Niveau d'utilité garanti par l'action $s_1\in S_1$ du joueur 1 = utilité la plus faible que le joueur 1 peut avoir en jouant l'action s_1 :

$$\eta_1(s_1)=\min_{\sigma_2\in\Sigma_2} u_1(s_1,\sigma_2)=\min_{s_2\in S_2} u_1(s_1,s_2)$$

28/ Exemple : jeu de la poule mouillée

	a	b
a	$(2,2)$	$(\mathbf{1},3)$
b	$(3,\mathbf{1})$	$(\mathbf{0},\mathbf{0})$

$$\eta_1(a)=\eta_2(a)=1$$
$$\eta_1(b)=\eta_2(b)=0$$

Une action prudente ou maximin est une action qui maximise ce niveau d'utilité que le joueur peut se garantir

Définition. Une action $s_1^* \in S_1$ est une **action prudente** ou **maximin** du joueur 1 si

$$s_1^* \in \arg\max_{s_1 \in S_1} \eta_1(s_1) = \arg\max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} u_1(s_1, s_2)$$

$\max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} u_1(s_1, s_2)$: *meilleur niveau d'utilité garanti possible en stratégies pures* pour le joueur 1

Exemple : dans jeu de la poule mouillée

	a	b
a	$(2, 2)$	$(\mathbf{1}, 3)$
b	$(3, \mathbf{1})$	$(\mathbf{0}, \mathbf{0})$

- stratégie prudente de chaque joueur : a
- meilleur niveau d'utilité garanti : 1

☞ Un profil de stratégies prudentes n'est pas nécessairement un équilibre de Nash

Définition. Une stratégie mixte $\sigma_1^* \in \Sigma_1$ est une **stratégie (mixte) prudente** ou **maximin** du joueur 1 si

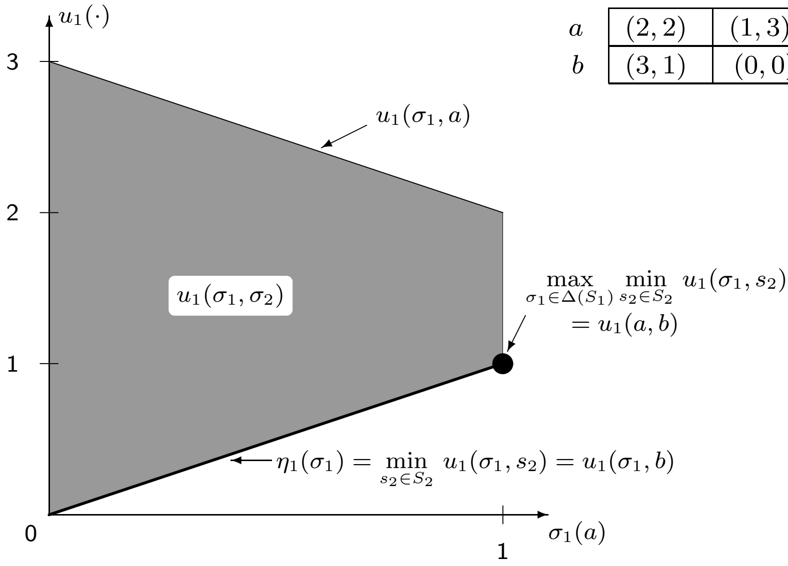
$$\sigma_1^* \in \arg\max_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} \eta_1(\sigma_1) = \arg\max_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} \min_{s_2 \in S_2} u_1(\sigma_1, s_2)$$

$\max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \min_{s_2 \in S_2} u_1(\sigma_1, s_2)$: *meilleur niveau d'utilité garanti possible en stratégies mixtes* pour le joueur 1

31/

Exemple de la poule mouillée : stratégie mixte prudente = action prudente

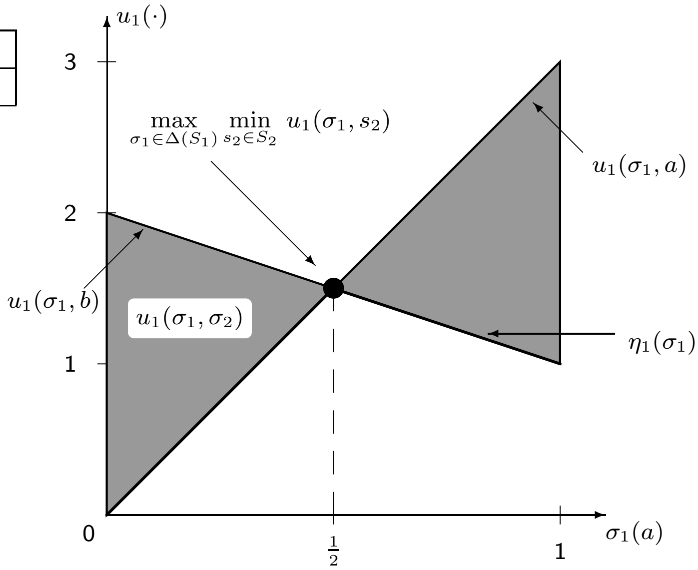
	a	b
a	$(2,2)$	$(1,3)$
b	$(3,1)$	$(0,0)$



32/

Une stratégie prudente peut cependant être non dégénérée. Bataille des sexes

	a	b
a	$(3,2)$	$(1,1)$
b	$(0,0)$	$(2,3)$



$$\max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} u_1(s_1, s_2) = 1 < \max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \min_{s_2 \in S_2} u_1(\sigma_1, s_2) = 1.5$$

Jeux à somme nulle

Définition. Un jeu sous forme normale à deux joueurs $\langle\{1,2\},(S_1,S_2),(u_1,u_2)\rangle$ est un **jeu à somme nulle** ou un **jeu strictement compétitif** si les joueurs ont des préférences diamétralement opposées : $u_1 = u$ et $u_2 = -u$

Remarque. Dans un jeu à somme nulle tout résultat est évidemment Pareto optimal

Exemples : Cache bouton, feuille-pierre-ciseaux, jeu d'échec

33/

Théorème. *Considérons un jeu fini et à somme nulle. Un profil de stratégies* (σ_1^*,σ_2^*) *est un équilibre de Nash si et seulement si* (σ_1^*,σ_2^*) *est un profil de stratégies prudentes. De plus, on a*

$$u_1(\sigma_1^*,\sigma_2^*) = \max_{\sigma_1\in\Sigma_1}\min_{\sigma_2\in\Sigma_2} u_1(\sigma_1,\sigma_2) = \min_{\sigma_2\in\Sigma_2}\max_{\sigma_1\in\Sigma_1} u_1(\sigma_1,\sigma_2) \qquad (1)$$

et donc tous les équilibres de Nash donnent la même utilité au joueur 1 (son meilleur niveau garanti possible, ou **valeur** *du jeu), et au joueur 2*

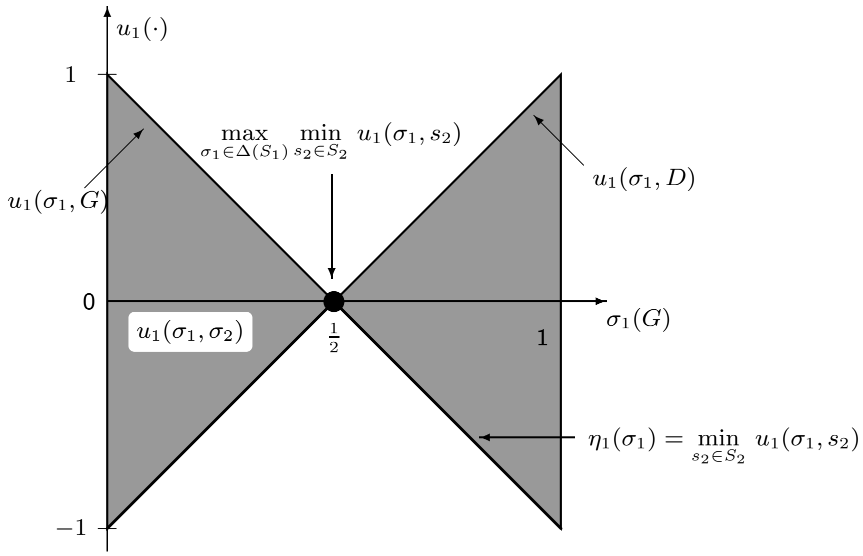
Remarques.

34/

- ➢ Égalité (1) $\sim$ Théorème du maximin (von Neumann, 1928)
- ➢ Égalité (1) pas vérifiée en stratégies pures (sauf si EN en stratégies pures). Ex : cache bouton
  $\max_{s_1\in S_1}\min_{s_2\in S_2} u_1(s_1,s_2) = -1 < \min_{s_2\in S_2}\max_{s_1\in S_1} u_1(s_1,s_2) = 1$
- ➢ Le paiement d'équilibre peut être garanti par chaque joueur indépendamment du comportement de l'autre joueur $\Rightarrow$ *stratégie optimale*
- ➢ Stratégies d'équilibre *interchangeables*

Exemple. Illustration du résultat du théorème dans le jeu cache bouton : la stratégie maximin du joueur 1 est bien équivalente à sa stratégie d'équilibre $\sigma_1^*(G) = 1/2$

35/



Proposition.

Soit G un jeu sous forme normale fini à somme nulle et G' le jeu obtenu à partir de G en supprimant une action du joueur i

Alors l'utilité d'équilibre du joueur i dans G' est inférieure ou égale à l'utilité d'équilibre du joueur i dans le jeu G

Ceci n'est pas nécessairement vrai dans les jeux à somme non nulle, même lorsque l'équilibre est unique

36/

Preuve. Directement du fait que dans les jeux à somme nulle

$u_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) = \max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} u_1(\sigma_1, \sigma_2)$ d'après le théorème et du fait que si $Y \subseteq X$ alors $\max_{x \in X} f(x) \geq \max_{x \in Y} f(x)$

Pour montrer que le résultat n'est plus vrai dans les jeux à somme non nulle, même lorsque l'équilibre est unique, il suffit de considérer le jeu suivant :

	a	b
a	$(10,0)$	$(1,1)$
b	$(5,5)$	$(0,0)$

L'unique EN est (a,b). Si on supprime la stratégie a du joueur 1 alors l'unique équilibre devient (b,a) qui apporte une utilité strictement supérieure au joueur 1 (et 2)

✍ Pourquoi dans un jeu symétrique fini et à somme nulle le paiement des deux joueurs est nul à tous les équilibres de Nash ?

Élimination itérative des stratégies dominées

– **Équilibre de Nash** : anticipations et coordination (souvent trop) parfaites

– **Stratégie prudente** : anticipations (souvent trop) pessimistes, naïves (sauf dans les jeux à somme nulle)

– **Élimination itérative des stratégies dominées** : ne repose ni sur l'hypothèse d'anticipations parfaites ni sur l'hypothèse d'anticipations pessimistes
  – mais sur l'idée que chaque joueur se comporte de manière rationnelle
  – chacun pense que les autres se comportent de manière rationnelle
  – chacun pense que chacun pense que chacun est rationnel
  ... etc ...

Définition. Une stratégie pure $s_i \in S_i$ est **strictement dominée** s'il existe une stratégie mixte $\sigma_i \in \Sigma_i$ telle que $u_i(\sigma_i,\, s_{-i}) > u_i(s_i,\, s_{-i})$ pour tout $s_{-i} \in S_{-i}$

39/ Une stratégie pure $s_i \in S_i$ est **faiblement dominée** s'il existe une stratégie mixte $\sigma_i \in \Sigma_i$ telle que $u_i(\sigma_i,\, s_{-i}) \geq u_i(s_i,\, s_{-i})$ pour tout $s_{-i} \in S_{-i}$, avec une inégalité stricte pour au moins un profil de stratégies pures s_{-i} des autres joueurs

Une stratégie peut être strictement dominée par une stratégie mixte sans être strictement dominée par une stratégie pure

Exemple.

	G	D
H	$(3,0)$	$(0,1)$
M	$(0,0)$	$(3,1)$
B	$(1,1)$	$(1,0)$

40/ La stratégie pure B rapporte toujours 1 quelle que soit la stratégie du joueur 2 alors que la stratégie mixte qui consiste à jouer H et M avec la même probabilité rapporte toujours une utilité espérée égale à 1.5 quelle que soit la stratégie du joueur 2. La stratégie pure B est donc strictement dominée, mais elle n'est pas strictement dominée par les stratégies pures H et M

Remarque. Si une stratégie pure s_i est strictement (faiblement) dominée alors toutes les stratégies mixtes qui mettent une probabilité strictement positive sur s_i sont strictement (faiblement) dominées

Un joueur ne joue pas de stratégie strictement dominée si et seulement si il maximise son utilité par rapport à ses croyances sur les stratégies (éventuellement corrélées) des autres joueurs

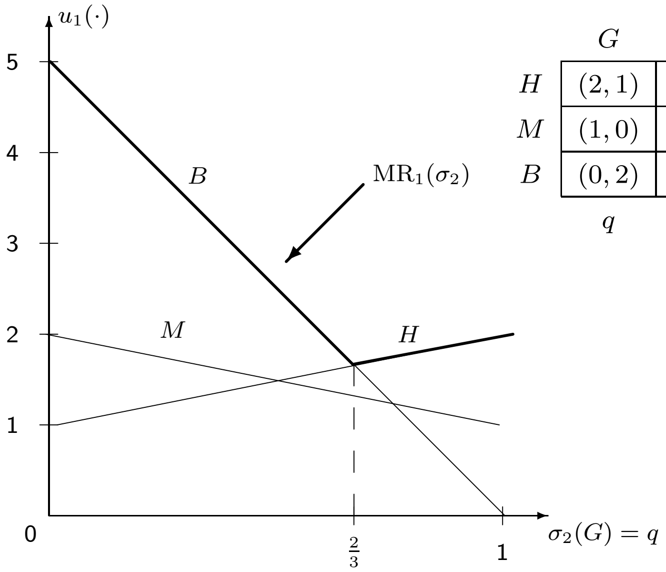
Proposition. *Une stratégie* s_i *du joueur* i *est strictement dominée si et seulement si* s_i *n'est jamais une meilleure réponse, c'est-à-dire que* $s_i \notin \mathrm{MR}_i(\mu_{-i})$ *pour toute croyance* $\mu_{-i} \in \Delta(S_{-i})$ *du joueur* i *sur le comportement des autres joueurs*

41/

Exemple.

	G	D
H	$(2,1)$	$(1,2)$
M	$(1,0)$	$(2,5)$
B	$(0,2)$	$(5,1)$
	q	$1-q$

42/



	G	D
H	$(2,1)$	$(1,2)$
M	$(1,0)$	$(2,5)$
B	$(0,2)$	$(5,1)$
	q	$1-q$

M n'est jamais une meilleure réponse donc elle est strictement dominée (e.g., par $(5/8, 0, 3/8)$)

Définition. Un ensemble de profils de stratégies $S^* \subseteq S$ **résiste à l'élimination itérative des stratégies strictement (faiblement) dominées** s'il existe une suite d'éliminations représentée par une suite de profils de stratégies $(S^k)_{k=1}^K$, où $S^k = (S_i^k)_{i \in N}$ pour tout k, telle que

- $S^0 = S$ et $S^K = S^*$
- $S^{k+1} \subseteq S^k$ pour tout k
- si $s_i \in S_i^k$ mais $s_i \notin S_i^{k+1}$ alors s_i est strictement (faiblement) dominée dans le jeu réduit $G^k = \langle N,\, (S_i^k)_i,\, (u_i)_i \rangle$
- aucune action n'est strictement (faiblement) dominée dans le jeu réduit $G^K = \langle N,\, (S_i^K)_i,\, (u_i)_i \rangle$

43/

Exemple. (domination stricte)

	G	D
H	$(3,0)$	$(0,1)$
M	$(0,0)$	$(3,1)$
B	$(1,1)$	$(1,0)$

$\Rightarrow$

	G	D
H	$(3,0)$	$(0,1)$
M	$(0,0)$	$(3,1)$

$\Rightarrow$

	D
H	$(0,1)$
M	$(3,1)$

$\Rightarrow$

	D
M	$(3,1)$

Proposition. *L'ensemble S^* qui résiste à l'élimination itérative des stratégies strictement dominées est défini de manière unique*

Par conséquent, l'ordre d'élimination des stratégies strictement dominées n'affecte pas le résultat final

L'ensemble S^* est aussi appelé ensemble des stratégies *rationalisables*

44/

Cependant, l'ordre d'élimination des stratégies faiblement dominées affecte le résultat final

Exemple.

	G	D
H	$(1,1)$	$(0,0)$
M	$(1,1)$	$(2,1)$
B	$(0,0)$	$(2,1)$

45/

Proposition. *Toute action jouée avec une probabilité positive à un équilibre de Nash résiste à l'élimination itérative des stratégies strictement dominées. Ceci n'est pas vrai pour l'élimination itérative des stratégies faiblement dominées. Cependant, après une élimination itérative des stratégies faiblement dominées il existe toujours au moins un équilibre de Nash*

Exemple. Considérons le duopole de Cournot avec $\theta_1 = \theta_2 = -1$:

$$u_i(s_1, s_2) = s_i(1 - s_1 - s_2) \qquad \mathrm{MR}_i(s_j) = \left\{\frac{1 - s_j}{2}\right\}$$

Le seul profil de stratégies qui résiste à l'élimination itérative des stratégies strictement dominées est l'EN

$$S_i^1 = \mathrm{MR}_i([0,1]) = [\mathrm{MR}_i(1), \mathrm{MR}_i(0)] = [0, 1/2],$$

toutes les stratégies supérieures à 1/2 étant strictement dominées par la stratégie 1/2. De même, aux itérations suivantes on obtient

46/

$$\begin{aligned} S_i^2 &= \mathrm{MR}_i([0,1/2]) = [\mathrm{MR}_i(1/2), \mathrm{MR}_i(0)] = [1/4, 1/2] \\ S_i^3 &= \mathrm{MR}_i([1/4,1/2]) = [\mathrm{MR}_i(1/2), \mathrm{MR}_i(1/4)] = [1/4, 3/8] \\ &\vdots \end{aligned}$$

Puisque $\mathrm{MR}_i(s_j) = \frac{1-s_j}{2}$ est telle que $|\mathrm{MR}_i'(s_j)| = 1/2 < 1$ pour tout s_j, la procédure $S_i^n = \mathrm{MR}_i(S_i^{n-1})$ converge vers le point fixe de la fonction MR_i, qui est bien l'équilibre de Nash du jeu, $s_i^* = 1/3$

Références

von Neumann, J. (1928) : "Zur Theories der Gesellschaftsspiele," *Math. Ann.*, 100, 295–320.