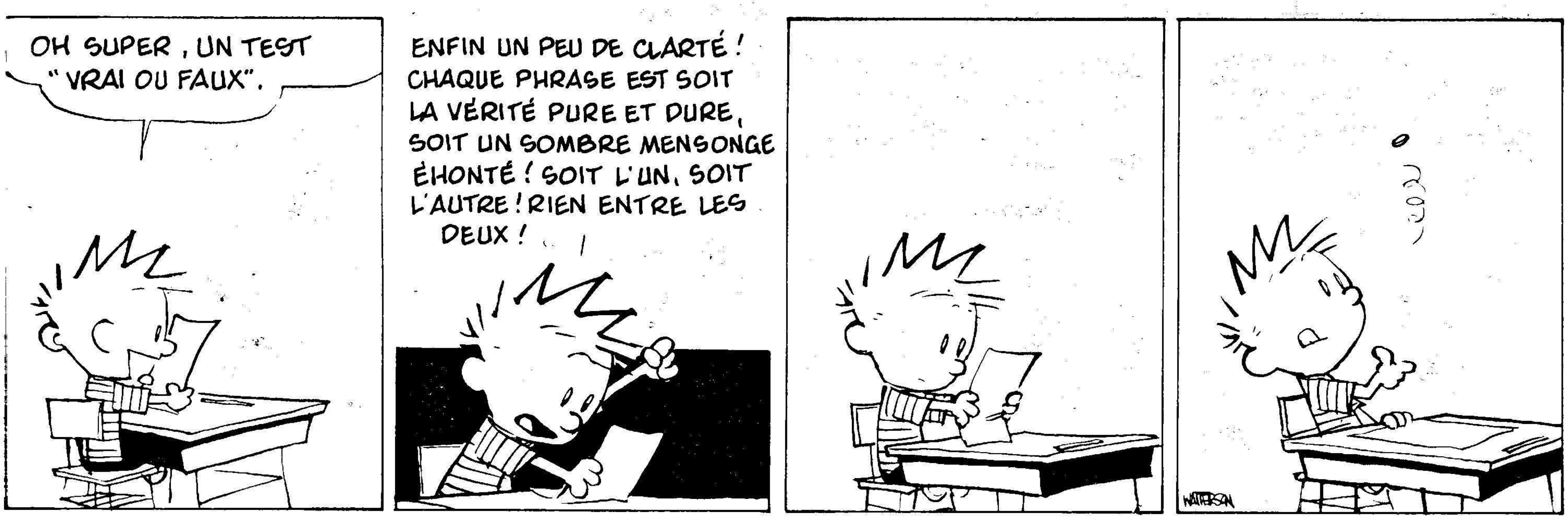
Extension mixte d'un jeu

(22 juillet 2008)

Extension mixte d'un jeu

(22 juillet 2008)



Stratégie pure (action) : souvent insuffisante pour décrire le comportement d'un joueur dans un jeu

Stratégie pure (action) : souvent insuffisante pour décrire le comportement d'un joueur dans un jeu

Comment écrire formellement qu'un joueur a tendance à jouer **plus souvent** pierre que ciseaux ?

Stratégie pure (action) : souvent insuffisante pour décrire le comportement d'un joueur dans un jeu

Comment écrire formellement qu'un joueur a tendance à jouer **plus souvent** pierre que ciseaux ?

➜ Meilleure réponse de l'autre joueur : jouer plus souvent feuille

Stratégie pure (action) : souvent insuffisante pour décrire le comportement d'un joueur dans un jeu

Comment écrire formellement qu'un joueur a tendance à jouer **plus souvent** pierre que ciseaux ?

➜ Meilleure réponse de l'autre joueur : jouer plus souvent feuille

➜ Le premier joueur devrait donc jouer plus souvent ciseaux, . . .

Stratégie pure (action) : souvent insuffisante pour décrire le comportement d'un joueur dans un jeu

Comment écrire formellement qu'un joueur a tendance à jouer **plus souvent** pierre que ciseaux ?

➜ Meilleure réponse de l'autre joueur : jouer plus souvent feuille

➜ Le premier joueur devrait donc jouer plus souvent ciseaux, ...

➥ Situation stable ?

Stratégie pure (action) : souvent insuffisante pour décrire le comportement d'un joueur dans un jeu

Comment écrire formellement qu'un joueur a tendance à jouer **plus souvent** pierre que ciseaux ?

➜ Meilleure réponse de l'autre joueur : jouer plus souvent feuille

➜ Le premier joueur devrait donc jouer plus souvent ciseaux, ...

➥ Situation stable ?

☞ Il faut définir des **stratégies aléatoires**

Stratégie pure (action) : souvent insuffisante pour décrire le comportement d'un joueur dans un jeu

Comment écrire formellement qu'un joueur a tendance à jouer **plus souvent** pierre que ciseaux ?

➜ Meilleure réponse de l'autre joueur : jouer plus souvent feuille

➜ Le premier joueur devrait donc jouer plus souvent ciseaux, . . .

➥ Situation stable ?

☞ Il faut définir des **stratégies aléatoires**

➢ ruse

Stratégie pure (action) : souvent insuffisante pour décrire le comportement d'un joueur dans un jeu

Comment écrire formellement qu'un joueur a tendance à jouer **plus souvent** pierre que ciseaux ?

➜ Meilleure réponse de l'autre joueur : jouer plus souvent feuille

➜ Le premier joueur devrait donc jouer plus souvent ciseaux, . . .

➥ Situation stable ?

☞ Il faut définir des **stratégies aléatoires**

- ➢ ruse
- ➢ secret

Stratégie pure (action) : souvent insuffisante pour décrire le comportement d'un joueur dans un jeu

Comment écrire formellement qu'un joueur a tendance à jouer **plus souvent** pierre que ciseaux ?

➜ Meilleure réponse de l'autre joueur : jouer plus souvent feuille

➜ Le premier joueur devrait donc jouer plus souvent ciseaux, . . .

➥ Situation stable ?

☞ Il faut définir des **stratégies aléatoires**

- ➢ ruse
- ➢ secret
- ➢ bluff

Stratégie pure (action) : souvent insuffisante pour décrire le comportement d'un joueur dans un jeu

Comment écrire formellement qu'un joueur a tendance à jouer **plus souvent** pierre que ciseaux ?

➜ Meilleure réponse de l'autre joueur : jouer plus souvent feuille

➜ Le premier joueur devrait donc jouer plus souvent ciseaux, . . .

➥ Situation stable ?

☞ Il faut définir des **stratégies aléatoires**

- ruse
- secret
- bluff

Ex : tire au but, poker, feuille-pierre-ciseaux, stratégies militaires, inspections des impôts . . . image

Définition. Une **stratégie mixte** pour le joueur i est une distribution de probabilité sur l'ensemble S_i des stratégies pures du joueur i

Définition. Une **stratégie mixte** pour le joueur i est une distribution de probabilité sur l'ensemble S_i des stratégies pures du joueur i

On note

$$\Sigma_i = \Delta(S_i) \equiv \{p \in \mathbb{R}^{|S_i|} : p_k \geq 0,\ \sum_k p_k = 1\}$$

l'ensemble des stratégies mixtes du joueur i, et $\sigma_i = (\sigma_i(s_i))_{s_i \in S_i}$ un élément de Σ_i

Définition. Une **stratégie mixte** pour le joueur i est une distribution de probabilité sur l'ensemble S_i des stratégies pures du joueur i

On note

$$\Sigma_i = \Delta(S_i) \equiv \{p \in \mathbb{R}^{|S_i|} : p_k \geq 0, \ \sum_k p_k = 1\}$$

l'ensemble des stratégies mixtes du joueur i, et $\sigma_i = (\sigma_i(s_i))_{s_i \in S_i}$ un élément de Σ_i

Une stratégie mixte σ_i est dite complètement mixte si $\sigma_i(s_i) > 0$ pour tout $s_i \in S_i$

Définition. Une **stratégie mixte** pour le joueur i est une distribution de probabilité sur l'ensemble S_i des stratégies pures du joueur i

On note

$$\Sigma_i = \Delta(S_i) \equiv \{p \in \mathbb{R}^{|S_i|} : p_k \geq 0, \sum_k p_k = 1\}$$

l'ensemble des stratégies mixtes du joueur i, et $\sigma_i = (\sigma_i(s_i))_{s_i \in S_i}$ un élément de Σ_i

Une stratégie mixte σ_i est dite complètement mixte si $\sigma_i(s_i) > 0$ pour tout $s_i \in S_i$

Une stratégie mixte σ_i est dite non dégénérée si elle n'assigne pas une probabilité égale à un à une des stratégie pures

Définition. Une **stratégie mixte** pour le joueur i est une distribution de probabilité sur l'ensemble S_i des stratégies pures du joueur i

On note

$$\Sigma_i = \Delta(S_i) \equiv \{p \in \mathbb{R}^{|S_i|} : p_k \geq 0,\ \sum_k p_k = 1\}$$

l'ensemble des stratégies mixtes du joueur i, et $\sigma_i = (\sigma_i(s_i))_{s_i \in S_i}$ un élément de Σ_i

Une stratégie mixte σ_i est dite complètement mixte si $\sigma_i(s_i) > 0$ pour tout $s_i \in S_i$

Une stratégie mixte σ_i est dite non dégénérée si elle n'assigne pas une probabilité égale à un à une des stratégie pures

Hypothèses de VNM sur les préférences $\Rightarrow$ un profil de stratégies mixtes $\sigma = (\sigma_i)_{i \in N}$ est évalué par le joueur i à l'aide de l'utilité espérée $U_i : \Sigma \to \mathbb{R}$

$$U_i(\sigma) = \sum_{s \in S} \sigma(s)\, u_i(s)$$

où $\sigma(s)$ est la probabilité que le profil de stratégies pures s soit joué étant donné σ

Définition. Une **stratégie mixte** pour le joueur i est une distribution de probabilité sur l'ensemble S_i des stratégies pures du joueur i

On note

$$\Sigma_i = \Delta(S_i) \equiv \{p \in \mathbb{R}^{|S_i|} : p_k \geq 0,\ \sum_k p_k = 1\}$$

l'ensemble des stratégies mixtes du joueur i, et $\sigma_i = (\sigma_i(s_i))_{s_i \in S_i}$ un élément de Σ_i

Une stratégie mixte σ_i est dite complètement mixte si $\sigma_i(s_i) > 0$ pour tout $s_i \in S_i$

Une stratégie mixte σ_i est dite non dégénérée si elle n'assigne pas une probabilité égale à un à une des stratégie pures

Hypothèses de VNM sur les préférences $\Rightarrow$ un profil de stratégies mixtes $\sigma = (\sigma_i)_{i \in N}$ est évalué par le joueur i à l'aide de l'utilité espérée $U_i : \Sigma \to \mathbb{R}$

$$U_i(\sigma) = \sum_{s \in S} \sigma(s)\, u_i(s)$$

où $\sigma(s)$ est la probabilité que le profil de stratégies pures s soit joué étant donné σ

Stratégies indépendantes $\Rightarrow \sigma(s) = \prod_{i \in N} \sigma_i(s_i)$

Exemple. Jeu à deux joueurs et deux actions : $S_1 = S_2 = \{a, b\}$, $p = \sigma_1(a)$, $q = \sigma_2(a)$

Exemple. Jeu à deux joueurs et deux actions : $S_1 = S_2 = \{a, b\}$, $p = \sigma_1(a)$, $q = \sigma_2(a)$

$$\begin{array}{c|c|c|c}
 & a & b & \\
\hline
a & p\,q & p\,(1-q) & p \\
\hline
b & (1-p)\,q & (1-p)\,(1-q) & 1-p \\
\hline
 & q & 1-q &
\end{array}$$

Exemple. Jeu à deux joueurs et deux actions : $S_1 = S_2 = \{a, b\}$, $p = \sigma_1(a)$, $q = \sigma_2(a)$

$$\begin{array}{c|c|c|c}
 & a & b & \\
\hline
a & p\,q & p\,(1-q) & p \\
\hline
b & (1-p)\,q & (1-p)\,(1-q) & 1-p \\
\hline
 & q & 1-q &
\end{array}$$

$$U_i(\sigma) = \; p\,q\,u_i(a,\,a) + p\,(1-q)\,u_i(a,\,b) + (1-p)\,q\,u_i(b,\,a) + (1-p)\,(1-q)\,u_i(b,\,b)$$

Exemple. Jeu à deux joueurs et deux actions : $S_1 = S_2 = \{a, b\}$, $p = \sigma_1(a)$, $q = \sigma_2(a)$

$$\begin{array}{c|c|c|c}
 & a & b & \\
\hline
a & p\,q & p\,(1-q) & p \\
\hline
b & (1-p)\,q & (1-p)\,(1-q) & 1-p \\
\hline
 & q & 1-q &
\end{array}$$

$$U_i(\sigma) = \; p\,q\,u_i(a,\,a) + p\,(1-q)\,u_i(a,\,b) + (1-p)\,q\,u_i(b,\,a) + (1-p)\,(1-q)\,u_i(b,\,b)$$

Remarques.

Exemple. Jeu à deux joueurs et deux actions : $S_1 = S_2 = \{a, b\}$, $p = \sigma_1(a)$, $q = \sigma_2(a)$

$$\begin{array}{c|c|c|c} & a & b & \\ \hline a & p\,q & p\,(1-q) & p \\ \hline b & (1-p)\,q & (1-p)\,(1-q) & 1-p \\ \hline & q & 1-q & \end{array}$$

$$U_i(\sigma) = \; p\,q\,u_i(a,\,a) + p\,(1-q)\,u_i(a,\,b) + (1-p)\,q\,u_i(b,\,a) + (1-p)\,(1-q)\,u_i(b,\,b)$$

Remarques.

– $U_i(\sigma)$ est un polynôme

Exemple. Jeu à deux joueurs et deux actions : $S_1 = S_2 = \{a, b\}$, $p = \sigma_1(a)$, $q = \sigma_2(a)$

	a	b	
a	$p\,q$	$p\,(1-q)$	p
b	$(1-p)\,q$	$(1-p)\,(1-q)$	$1-p$
	q	$1-q$	

$$U_i(\sigma) = \; p\,q\,u_i(a,\,a) + p\,(1-q)\,u_i(a,\,b) + (1-p)\,q\,u_i(b,\,a) + (1-p)\,(1-q)\,u_i(b,\,b)$$

Remarques.

– $U_i(\sigma)$ est un polynôme

– $U_i(\sigma)$ est multilinéaire (linéaire en σ_k à σ_{-k} fixé pour tout k) :

$$U_i(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = \sum_{(s_1,\ldots,s_n)\in S} \sigma_1(s_1) \times \ldots \times \sigma_n(s_n) u_i(s_1, \ldots, s_n)$$

Exemple. Jeu à deux joueurs et deux actions : $S_1 = S_2 = \{a, b\}$, $p = \sigma_1(a)$, $q = \sigma_2(a)$

	a	b	
a	$p\,q$	$p\,(1-q)$	p
b	$(1-p)\,q$	$(1-p)\,(1-q)$	$1-p$
	q	$1-q$	

$$U_i(\sigma) = \; p\,q\,u_i(a,\,a) + p\,(1-q)\,u_i(a,\,b) + (1-p)\,q\,u_i(b,\,a) + (1-p)\,(1-q)\,u_i(b,\,b)$$

Remarques.

– $U_i(\sigma)$ est un polynôme

– $U_i(\sigma)$ est multilinéaire (linéaire en σ_k à σ_{-k} fixé pour tout k) :

$$U_i(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = \sum_{(s_1,\ldots,s_n)\in S} \sigma_1(s_1) \times \ldots \times \sigma_n(s_n) u_i(s_1, \ldots, s_n)$$

donc en particulier

Exemple. Jeu à deux joueurs et deux actions : $S_1 = S_2 = \{a, b\}$, $p = \sigma_1(a)$, $q = \sigma_2(a)$

	a	b	
a	$p\,q$	$p\,(1-q)$	p
b	$(1-p)\,q$	$(1-p)\,(1-q)$	$1-p$
	q	$1-q$	

$$U_i(\sigma) = \; p\,q\,u_i(a,\,a) + p\,(1-q)\,u_i(a,\,b) + (1-p)\,q\,u_i(b,\,a) + (1-p)\,(1-q)\,u_i(b,\,b)$$

Remarques.

– $U_i(\sigma)$ est un polynôme

– $U_i(\sigma)$ est multilinéaire (linéaire en σ_k à σ_{-k} fixé pour tout k) :

$$U_i(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = \sum_{(s_1,\ldots,s_n)\in S} \sigma_1(s_1) \times \ldots \times \sigma_n(s_n) u_i(s_1, \ldots, s_n)$$

– continue en σ

donc en particulier

Exemple. Jeu à deux joueurs et deux actions : $S_1 = S_2 = \{a, b\}$, $p = \sigma_1(a)$, $q = \sigma_2(a)$

$$\begin{array}{c|c|c|c} & a & b & \\ \hline a & p\,q & p\,(1-q) & p \\ \hline b & (1-p)\,q & (1-p)\,(1-q) & 1-p \\ \hline & q & 1-q & \end{array}$$

$$U_i(\sigma) = \; p\,q\,u_i(a,\,a) + p\,(1-q)\,u_i(a,\,b) + (1-p)\,q\,u_i(b,\,a) + (1-p)\,(1-q)\,u_i(b,\,b)$$

Remarques.

– $U_i(\sigma)$ est un polynôme

– $U_i(\sigma)$ est multilinéaire (linéaire en σ_k à σ_{-k} fixé pour tout k) :

$$U_i(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = \sum_{(s_1,\ldots,s_n)\in S} \sigma_1(s_1) \times \ldots \times \sigma_n(s_n) u_i(s_1, \ldots, s_n)$$

donc en particulier

– continue en σ

– quasi-concave par rapport à σ_i

Le jeu sous forme normale $\langle N,\, (\Sigma_i)_i,\, (U_i)_i \rangle$ est appelé **extension mixte** du jeu sous forme normale $\langle N,\, (S_i)_i,\, (u_i)_i \rangle$

Le jeu sous forme normale $\langle N, (\Sigma_i)_i, (U_i)_i \rangle$ est appelé **extension mixte** du jeu sous forme normale $\langle N, (S_i)_i, (u_i)_i \rangle$

Dans la suite "$u_i = U_i$"

Le jeu sous forme normale $\langle N, (\Sigma_i)_i, (U_i)_i \rangle$ est appelé **extension mixte** du jeu sous forme normale $\langle N, (S_i)_i, (u_i)_i \rangle$

Dans la suite "$u_i = U_i$"

➥ $u_i(s_i, \sigma_{-i}) =$ utilité espérée du joueur i lorsqu'il joue la stratégie pure s_i et lorsque les autres joueurs jouent le profil de stratégies mixtes σ_{-i}

Le jeu sous forme normale $\langle N,\, (\Sigma_i)_i,\, (U_i)_i \rangle$ est appelé **extension mixte** du jeu sous forme normale $\langle N,\, (S_i)_i,\, (u_i)_i \rangle$

Dans la suite "$u_i = U_i$"

➥ $u_i(s_i,\, \sigma_{-i}) =$ utilité espérée du joueur i lorsqu'il joue la stratégie pure s_i et lorsque les autres joueurs jouent le profil de stratégies mixtes σ_{-i}

Définition. Un **équilibre de Nash en stratégies mixtes** du jeu sous forme normale

$$\langle N,\, (S_i)_i,\, (u_i)_i \rangle$$

est un équilibre de Nash en stratégies pures de l'extension mixte de ce jeu

Le jeu sous forme normale $\langle N,\, (\Sigma_i)_i,\, (U_i)_i \rangle$ est appelé **extension mixte** du jeu sous forme normale $\langle N,\, (S_i)_i,\, (u_i)_i \rangle$

Dans la suite "$u_i = U_i$"

➥ $u_i(s_i,\, \sigma_{-i}) =$ utilité espérée du joueur i lorsqu'il joue la stratégie pure s_i et lorsque les autres joueurs jouent le profil de stratégies mixtes σ_{-i}

Définition. Un **équilibre de Nash en stratégies mixtes** du jeu sous forme normale

$$\langle N,\, (S_i)_i,\, (u_i)_i \rangle$$

est un équilibre de Nash en stratégies pures de l'extension mixte de ce jeu

c'est-à-dire, un profil de stratégies $\sigma^* \in \Sigma$ tel que

$$u_i(\sigma_i^*,\, \sigma_{-i}^*) \geq u_i(\sigma_i,\, \sigma_{-i}^*), \quad \forall\, \sigma_i \in \Sigma_i,\ \forall\, i \in N$$

Proposition. *L'ensemble des équilibres de Nash en stratégies pures est un sous ensemble de l'ensemble des équilibres de Nash en stratégies mixtes*

Proposition. *L'ensemble des équilibres de Nash en stratégies pures est un sous ensemble de l'ensemble des équilibres de Nash en stratégies mixtes*

Preuve. Un équilibre de Nash en stratégies pures est un profil de stratégies mixtes dégénéré. Ce profil de stratégies est un équilibre de Nash en stratégies mixtes car, d'après la multilinéarité de la fonction d'utilité espérée on a
$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*)\ \forall\ s_i \in S_i \Rightarrow u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(\sigma_i, s_{-i}^*)\ \forall\ \sigma_i \in \Sigma_i$ □

Proposition. *L'ensemble des équilibres de Nash en stratégies pures est un sous ensemble de l'ensemble des équilibres de Nash en stratégies mixtes*

Preuve. Un équilibre de Nash en stratégies pures est un profil de stratégies mixtes dégénéré. Ce profil de stratégies est un équilibre de Nash en stratégies mixtes car, d'après la multilinéarité de la fonction d'utilité espérée on a $u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*)\ \forall\ s_i \in S_i \Rightarrow u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(\sigma_i, s_{-i}^*)\ \forall\ \sigma_i \in \Sigma_i$ $\square$

Support de la stratégie mixte σ_i :

$$\text{supp}[\sigma_i] = \{s_i \in S_i : \sigma_i(s_i) > 0\}$$

Proposition. *L'ensemble des équilibres de Nash en stratégies pures est un sous ensemble de l'ensemble des équilibres de Nash en stratégies mixtes*

Preuve. Un équilibre de Nash en stratégies pures est un profil de stratégies mixtes dégénéré. Ce profil de stratégies est un équilibre de Nash en stratégies mixtes car, d'après la multilinéarité de la fonction d'utilité espérée on a $u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*) \; \forall \; s_i \in S_i \Rightarrow u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(\sigma_i, s_{-i}^*) \; \forall \; \sigma_i \in \Sigma_i$ $\square$

Support de la stratégie mixte σ_i :

$$\mathrm{supp}[\sigma_i] = \{s_i \in S_i : \sigma_i(s_i) > 0\}$$

$=$ toutes les actions jouées avec une probabilité strictement positive par le joueur i

Illustration : décision individuelle

Illustration : décision individuelle

Choisir entre $a =$ “faire un jogging”

Illustration : décision individuelle

Choisir entre $a =$ “faire un jogging”, $b =$ “faire des exercices de théorie des jeux”

Illustration : décision individuelle

Choisir entre $a =$ “faire un jogging”, $b =$ “faire des exercices de théorie des jeux”
$c =$ “aller au cinéma”

Illustration : décision individuelle

Choisir entre $a =$ “faire un jogging”, $b =$ “faire des exercices de théorie des jeux”
$c =$ “aller au cinéma”, $d =$ “faire une sieste”

Illustration : décision individuelle

Choisir entre $a =$ "faire un jogging", $b =$ "faire des exercices de théorie des jeux"
$c =$ "aller au cinéma", $d =$ "faire une sieste"

$\sigma_i = (p_a, p_b, p_c, p_d)$: Stratégie du décideur

Illustration : décision individuelle

Choisir entre $a =$ "faire un jogging", $b =$ "faire des exercices de théorie des jeux" $c =$ "aller au cinéma", $d =$ "faire une sieste"

$\sigma_i = (p_a, p_b, p_c, p_d)$: Stratégie du décideur

$\Rightarrow$ Loterie

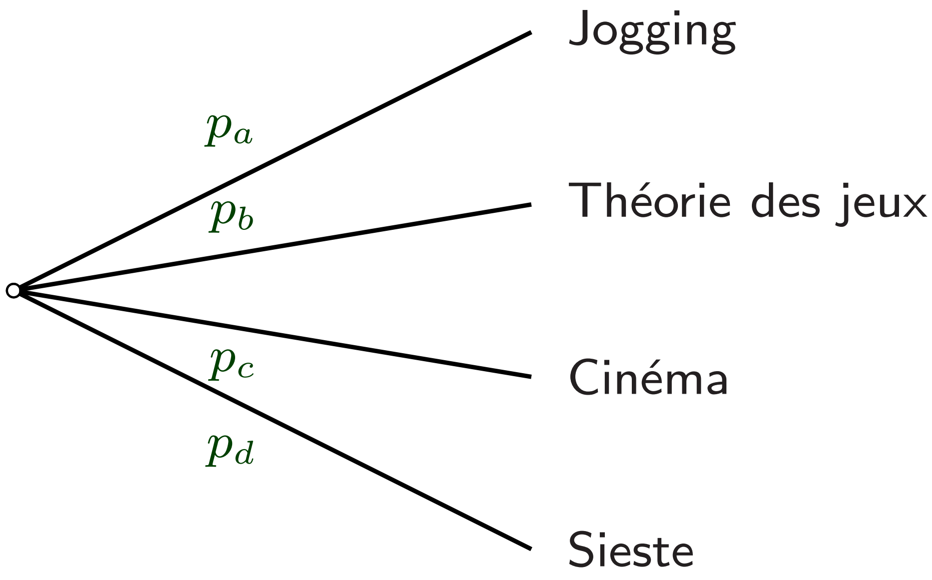
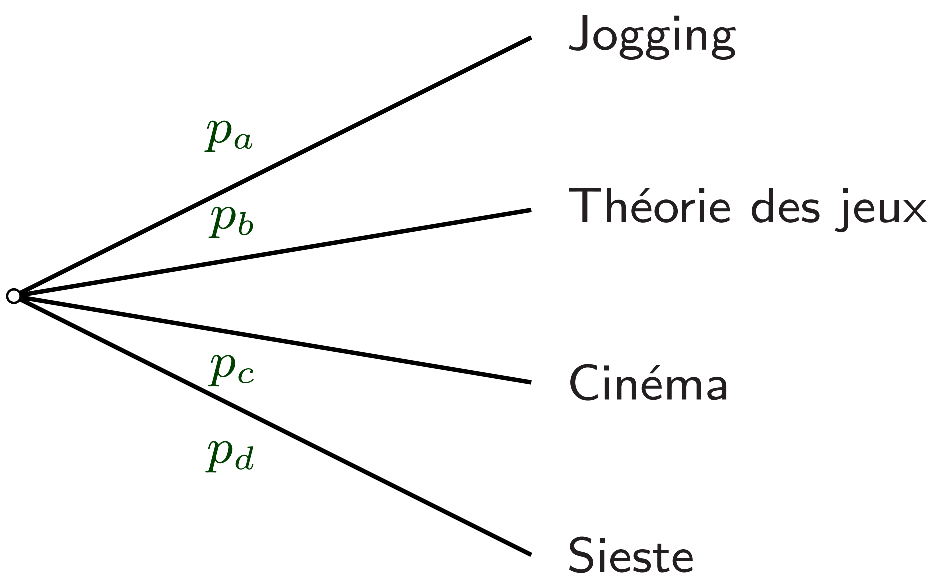


Illustration : décision individuelle

Choisir entre $a =$ “faire un jogging”, $b =$ “faire des exercices de théorie des jeux” $c =$ “aller au cinéma”, $d =$ “faire une sieste”

$\sigma_i = (p_a, p_b, p_c, p_d)$: Stratégie du décideur

$\Rightarrow$ Loterie



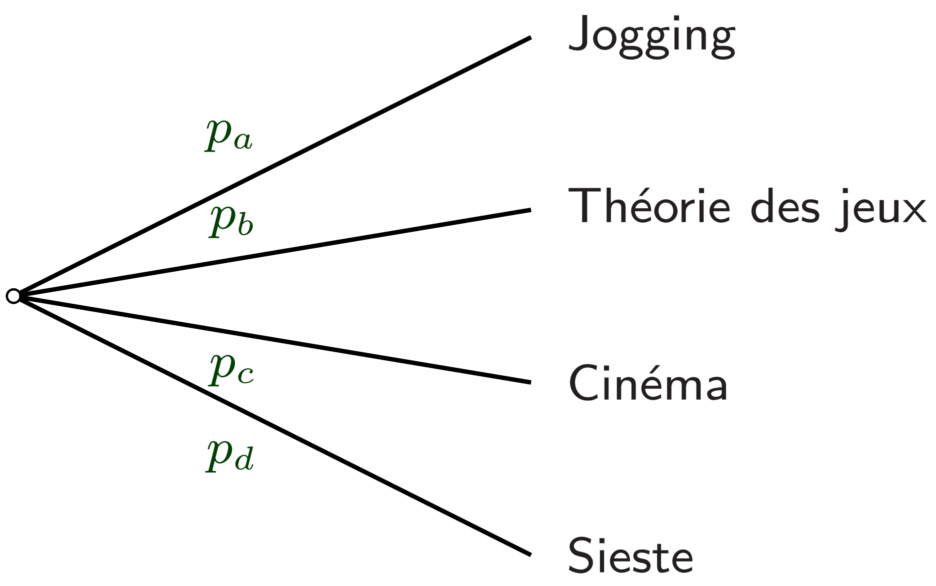
Le décideur joue $\sigma_i = (\frac{5}{6}, \frac{1}{6}, 0, 0)$

Illustration : décision individuelle

Choisir entre $a =$ “faire un jogging”, $b =$ “faire des exercices de théorie des jeux” $c =$ “aller au cinéma”, $d =$ “faire une sieste”

$\sigma_i = (p_a, p_b, p_c, p_d)$: Stratégie du décideur

$\Rightarrow$ Loterie



Le décideur joue $\sigma_i = (\frac{5}{6}, \frac{1}{6}, 0, 0)$

$$\Rightarrow \text{supp}[\sigma_i] = \{a, b\}$$

Pour tout (p_a, p_b, p_c, p_d),

Pour tout (p_a, p_b, p_c, p_d),

$$\frac{5}{6}u_i(a) + \frac{1}{6}u_i(b) \geq p_a\, u_i(a) + p_b\, u_i(b) + p_c\, u_i(c) + p_d\, u_i(d)$$

Pour tout (p_a, p_b, p_c, p_d),

$$\frac{5}{6}u_i(a) + \frac{1}{6}u_i(b) \geq p_a\, u_i(a) + p_b\, u_i(b) + p_c\, u_i(c) + p_d\, u_i(d)$$

$$\Leftrightarrow \quad u_i(a) = u_i(b) \geq \begin{cases} u_i(c) \\ u_i(d) \end{cases}$$

Pour tout (p_a, p_b, p_c, p_d),

$$\frac{5}{6}u_i(a) + \frac{1}{6}u_i(b) \geq p_a\, u_i(a) + p_b\, u_i(b) + p_c\, u_i(c) + p_d\, u_i(d)$$

$$\Leftrightarrow \quad u_i(a) = u_i(b) \geq \begin{cases} u_i(c) \\ u_i(d) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ si le décideur "joue aux dés" pour décider entre les actions a et b, alors il préfère a et b à toutes les autres actions et il est indifférent entre a et b

Proposition. *Un profil de stratégies* $\sigma^* \in \Sigma$ *est un équilibre de Nash en stratégies mixtes d'un jeu sous forme normale fini si et seulement si pour tout* $i \in N$

Proposition. *Un profil de stratégies* $\sigma^* \in \Sigma$ *est un équilibre de Nash en stratégies mixtes d'un jeu sous forme normale fini si et seulement si pour tout* $i \in N$

$$u_i(s_i,\, \sigma^*_{-i}) = u_i(s'_i,\, \sigma^*_{-i}), \quad \forall\, s_i,\, s'_i \in \mathrm{supp}[\sigma^*_i]$$

Proposition. *Un profil de stratégies* $\sigma^* \in \Sigma$ *est un équilibre de Nash en stratégies mixtes d'un jeu sous forme normale fini si et seulement si pour tout* $i \in N$

$$u_i(s_i,\, \sigma^*_{-i}) = u_i(s'_i,\, \sigma^*_{-i}), \quad \forall\, s_i,\, s'_i \in \operatorname{supp}[\sigma^*_i]$$

et

Proposition. *Un profil de stratégies* $\sigma^* \in \Sigma$ *est un équilibre de Nash en stratégies mixtes d'un jeu sous forme normale fini si et seulement si pour tout* $i \in N$

$$u_i(s_i,\, \sigma^*_{-i}) = u_i(s'_i,\, \sigma^*_{-i}), \quad \forall\, s_i,\, s'_i \in \mathrm{supp}[\sigma^*_i]$$

$$\textit{et} \quad u_i(s_i,\, \sigma^*_{-i}) \geq u_i(s''_i,\, \sigma^*_{-i}), \quad \forall\, s_i \in \mathrm{supp}[\sigma^*_i],\ s''_i \in S_i$$

Proposition. *Un profil de stratégies* $\sigma^* \in \Sigma$ *est un équilibre de Nash en stratégies mixtes d'un jeu sous forme normale fini si et seulement si pour tout* $i \in N$

$$u_i(s_i,\, \sigma^*_{-i}) = u_i(s'_i,\, \sigma^*_{-i}), \quad \forall\, s_i,\, s'_i \in \mathrm{supp}[\sigma^*_i]$$

$$\textit{et} \quad u_i(s_i,\, \sigma^*_{-i}) \geq u_i(s''_i,\, \sigma^*_{-i}), \quad \forall\, s_i \in \mathrm{supp}[\sigma^*_i],\; s''_i \in S_i$$

Preuve. L'équivalence provient directement de la multilinéarité de la fonction d'utilité espérée :

Proposition. *Un profil de stratégies* $\sigma^* \in \Sigma$ *est un équilibre de Nash en stratégies mixtes d'un jeu sous forme normale fini si et seulement si pour tout* $i \in N$

$$u_i(s_i,\, \sigma^*_{-i}) = u_i(s'_i,\, \sigma^*_{-i}), \quad \forall\, s_i,\, s'_i \in \mathrm{supp}[\sigma^*_i]$$

et $$u_i(s_i,\, \sigma^*_{-i}) \geq u_i(s''_i,\, \sigma^*_{-i}), \quad \forall\, s_i \in \mathrm{supp}[\sigma^*_i],\; s''_i \in S_i$$

Preuve. L'équivalence provient directement de la multilinéarité de la fonction d'utilité espérée :

$$u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i)\, u_i(s_i, \sigma_{-i})$$

Proposition. *Un profil de stratégies* $\sigma^* \in \Sigma$ *est un équilibre de Nash en stratégies mixtes d'un jeu sous forme normale fini si et seulement si pour tout* $i \in N$

$$\begin{aligned} & u_i(s_i,\, \sigma^*_{-i}) = u_i(s'_i,\, \sigma^*_{-i}), \quad \forall\, s_i,\, s'_i \in \operatorname{supp}[\sigma^*_i] \\ \textit{et} \quad & u_i(s_i,\, \sigma^*_{-i}) \geq u_i(s''_i,\, \sigma^*_{-i}), \quad \forall\, s_i \in \operatorname{supp}[\sigma^*_i],\;\; s''_i \in S_i \end{aligned}$$

Preuve. L'équivalence provient directement de la multilinéarité de la fonction d'utilité espérée :

$$u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i)\, u_i(s_i, \sigma_{-i})$$

En particulier, $\sigma_i \in \mathrm{MR}_i(\sigma_{-i})$ si et seulement si $s_i \in \mathrm{MR}_i(\sigma_{-i})$ pour tout $s_i \in \operatorname{supp}[\sigma_i]$.

Proposition. *Un profil de stratégies* $\sigma^* \in \Sigma$ *est un équilibre de Nash en stratégies mixtes d'un jeu sous forme normale fini si et seulement si pour tout* $i \in N$

$$u_i(s_i,\, \sigma^*_{-i}) = u_i(s'_i,\, \sigma^*_{-i}), \quad \forall\, s_i,\, s'_i \in \mathrm{supp}[\sigma^*_i]$$

$$\textit{et} \quad u_i(s_i,\, \sigma^*_{-i}) \geq u_i(s''_i,\, \sigma^*_{-i}), \quad \forall\, s_i \in \mathrm{supp}[\sigma^*_i],\;\, s''_i \in S_i$$

Preuve. L'équivalence provient directement de la multilinéarité de la fonction d'utilité espérée :

$$u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i)\, u_i(s_i, \sigma_{-i})$$

En particulier, $\sigma_i \in \mathrm{MR}_i(\sigma_{-i})$ si et seulement si $s_i \in \mathrm{MR}_i(\sigma_{-i})$ pour tout $s_i \in \mathrm{supp}[\sigma_i]$. Autrement dit, on a toujours $\max_{\sigma_i \in \Sigma_i} u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, \sigma_{-i})$ $\square$

✍ Vérifiez et expliquez pourquoi dans le jeu suivant la paire de stratégies indiquée, $(3/4, 0, 1/4)$ pour le joueur 1 et $(0, 1/3, 2/3)$ pour le joueur 2, est un équilibre de Nash (les points indiquent des utilités quelconques sans importance)

	G (0)	C $(1/3)$	D $(2/3)$
H $(3/4)$	$(\cdot, 2)$	$(3, 3)$	$(1, 1)$
M (0)	$(\cdot, \cdot)$	$(0, \cdot)$	$(2, \cdot)$
B $(1/4)$	$(\cdot, 4)$	$(5, 1)$	$(0, 7)$

Proposition. (Théorème de Nash) *Tout jeu sous forme normale fini possède au moins un équilibre de Nash en stratégies mixtes*

Proposition. (Théorème de Nash) *Tout jeu sous forme normale fini possède au moins un équilibre de Nash en stratégies mixtes*

Preuve. Ce résultat est un corollaire du théorème d'existence d'un EN en stratégies pures puisque l'extension mixte d'un jeu fini vérifie les propriétés demandées :

Proposition. (Théorème de Nash) *Tout jeu sous forme normale fini possède au moins un équilibre de Nash en stratégies mixtes*

Preuve. Ce résultat est un corollaire du théorème d'existence d'un EN en stratégies pures puisque l'extension mixte d'un jeu fini vérifie les propriétés demandées :

- ➢ pour tout i, l'ensemble des stratégies $\Sigma_i \subseteq \mathbb{R}^{|S_i|}$ est non vide, compact et convexe (c'est le simplexe de dimension $|S_i|$)

Proposition. (Théorème de Nash) *Tout jeu sous forme normale fini possède au moins un équilibre de Nash en stratégies mixtes*

Preuve. Ce résultat est un corollaire du théorème d'existence d'un EN en stratégies pures puisque l'extension mixte d'un jeu fini vérifie les propriétés demandées :

➢ pour tout i, l'ensemble des stratégies $\Sigma_i \subseteq \mathbb{R}^{|S_i|}$ est non vide, compact et convexe (c'est le simplexe de dimension $|S_i|$)

➢ la fonction $u_i : \Sigma \to \mathbb{R}$ est multilinéaire, donc $u_i(\sigma)$ est continue en σ et quasi-concave en σ_i. □

Proposition. (Théorème de Nash) *Tout jeu sous forme normale fini possède au moins un équilibre de Nash en stratégies mixtes*

Preuve. Ce résultat est un corollaire du théorème d'existence d'un EN en stratégies pures puisque l'extension mixte d'un jeu fini vérifie les propriétés demandées :

➢ pour tout i, l'ensemble des stratégies $\Sigma_i \subseteq \mathbb{R}^{|S_i|}$ est non vide, compact et convexe (c'est le simplexe de dimension $|S_i|$)

➢ la fonction $u_i : \Sigma \to \mathbb{R}$ est multilinéaire, donc $u_i(\sigma)$ est continue en σ et quasi-concave en σ_i. □

Proposition. *Tout jeu fini symétrique admet un équilibre de Nash en stratégies mixtes qui est symétrique*

Proposition. (Théorème de Nash) *Tout jeu sous forme normale fini possède au moins un équilibre de Nash en stratégies mixtes*

Preuve. Ce résultat est un corollaire du théorème d'existence d'un EN en stratégies pures puisque l'extension mixte d'un jeu fini vérifie les propriétés demandées :

➢ pour tout i, l'ensemble des stratégies $\Sigma_i \subseteq \mathbb{R}^{|S_i|}$ est non vide, compact et convexe (c'est le simplexe de dimension $|S_i|$)

➢ la fonction $u_i : \Sigma \to \mathbb{R}$ est multilinéaire, donc $u_i(\sigma)$ est continue en σ et quasi-concave en σ_i. □

Proposition. *Tout jeu fini symétrique admet un équilibre de Nash en stratégies mixtes qui est symétrique*

Preuve. Directement de la proposition concernant l'existence d'un EN en stratégies pures symétrique □

Exemples

Exemples

Dilemme des prisonniers.

	D	C
D	$(1,1)$	$(3,0)$
C	$(0,3)$	$(2,2)$

Exemples

Dilemme des prisonniers.

	D	C
D	$(1, 1)$	$(3, 0)$
C	$(0, 3)$	$(2, 2)$

Pas d'autre EN que (D, D) car D domine strictement C pour les deux joueurs

Jeu de coordination.

	a	b	
a	$(2,2)$	$(0,0)$	p
b	$(0,0)$	$(1,1)$	$1-p$
	q	$1-q$	

Jeu de coordination.

$$
\begin{array}{c|c|c|c}
 & a & b & \\
\hline
a & (2,2) & (0,0) & p \\
\hline
b & (0,0) & (1,1) & 1-p \\
\hline
 & q & 1-q &
\end{array}
$$

$p = \sigma_1(a)$: probabilité que le joueur 1 joue l'action a

Jeu de coordination.

	a	b	
a	$(2,2)$	$(0,0)$	p
b	$(0,0)$	$(1,1)$	$1-p$
	q	$1-q$	

$p = \sigma_1(a)$: probabilité que le joueur 1 joue l'action a

$q = \sigma_2(a)$: probabilité que le joueur 2 joue l'action a

Jeu de coordination.

$$\begin{array}{c|c|c|c} & a & b & \\ \hline a & (2,2) & (0,0) & p \\ \hline b & (0,0) & (1,1) & 1-p \\ \hline & q & 1-q & \end{array}$$

$p = \sigma_1(a)$: probabilité que le joueur 1 joue l'action a

$q = \sigma_2(a)$: probabilité que le joueur 2 joue l'action a

Si $p \in \{0, 1\}$ on retrouve les deux EN en stratégies pures (a, a) et (b, b)

Jeu de coordination.

	a	b	
a	$(2,2)$	$(0,0)$	p
b	$(0,0)$	$(1,1)$	$1-p$
	q	$1-q$	

$p = \sigma_1(a)$: probabilité que le joueur 1 joue l'action a

$q = \sigma_2(a)$: probabilité que le joueur 2 joue l'action a

Si $p \in \{0,1\}$ on retrouve les deux EN en stratégies pures (a,a) et (b,b)

Si $0 < p < 1$ alors le joueur 1 doit être indifférent

Jeu de coordination.

$$\begin{array}{c|c|c|c} & a & b & \\ \hline a & (2,2) & (0,0) & p \\ \hline b & (0,0) & (1,1) & 1-p \\ \hline & q & 1-q & \end{array}$$

$p = \sigma_1(a)$: probabilité que le joueur 1 joue l'action a

$q = \sigma_2(a)$: probabilité que le joueur 2 joue l'action a

Si $p \in \{0, 1\}$ on retrouve les deux EN en stratégies pures (a, a) et (b, b)

Si $0 < p < 1$ alors le joueur 1 doit être indifférent

a

Jeu de coordination.

$$\begin{array}{c|c|c|c} & a & b & \\ \hline a & (2,2) & (0,0) & p \\ \hline b & (0,0) & (1,1) & 1-p \\ \hline & q & 1-q & \end{array}$$

$p = \sigma_1(a)$: probabilité que le joueur 1 joue l'action a

$q = \sigma_2(a)$: probabilité que le joueur 2 joue l'action a

Si $p \in \{0, 1\}$ on retrouve les deux EN en stratégies pures (a, a) et (b, b)

Si $0 < p < 1$ alors le joueur 1 doit être indifférent

$$a \xrightarrow{1} u_1(a, \sigma_2)$$

Jeu de coordination.

$$\begin{array}{c|c|c|c} & a & b & \\ \hline a & (2,2) & (0,0) & p \\ \hline b & (0,0) & (1,1) & 1-p \\ \hline & q & 1-q & \end{array}$$

$p = \sigma_1(a)$: probabilité que le joueur 1 joue l'action a

$q = \sigma_2(a)$: probabilité que le joueur 2 joue l'action a

Si $p \in \{0, 1\}$ on retrouve les deux EN en stratégies pures (a, a) et (b, b)

Si $0 < p < 1$ alors le joueur 1 doit être indifférent

$$a \xrightarrow{1} u_1(a, \sigma_2) = 2q + 0(1 - q)$$

Jeu de coordination.

$$\begin{array}{cccc} & a & b & \\ a & (2,2) & (0,0) & p \\ b & (0,0) & (1,1) & 1-p \\ & q & 1-q & \end{array}$$

$p = \sigma_1(a)$: probabilité que le joueur 1 joue l'action a

$q = \sigma_2(a)$: probabilité que le joueur 2 joue l'action a

Si $p \in \{0,1\}$ on retrouve les deux EN en stratégies pures (a,a) et (b,b)

Si $0 < p < 1$ alors le joueur 1 doit être indifférent

$$a \xrightarrow{1} u_1(a, \sigma_2) = 2q + 0(1-q) = 2q$$

Jeu de coordination.

$$\begin{array}{c|c|c|c} & a & b & \\ \hline a & (2,2) & (0,0) & p \\ \hline b & (0,0) & (1,1) & 1-p \\ \hline & q & 1-q & \end{array}$$

$p = \sigma_1(a)$: probabilité que le joueur 1 joue l'action a

$q = \sigma_2(a)$: probabilité que le joueur 2 joue l'action a

Si $p \in \{0, 1\}$ on retrouve les deux EN en stratégies pures (a, a) et (b, b)

Si $0 < p < 1$ alors le joueur 1 doit être indifférent

$$a \xrightarrow{1} u_1(a, \sigma_2) = 2q + 0(1-q) = 2q$$

$$b$$

Jeu de coordination.

	a	b	
a	$(2,2)$	$(0,0)$	p
b	$(0,0)$	$(1,1)$	$1-p$
	q	$1-q$	

$p = \sigma_1(a)$: probabilité que le joueur 1 joue l'action a

$q = \sigma_2(a)$: probabilité que le joueur 2 joue l'action a

Si $p \in \{0,1\}$ on retrouve les deux EN en stratégies pures (a,a) et (b,b)

Si $0 < p < 1$ alors le joueur 1 doit être indifférent

$$a \xrightarrow{1} u_1(a,\sigma_2) = 2q + 0(1-q) = 2q$$

$$b \xrightarrow{1} u_1(b,\sigma_2)$$

Jeu de coordination.

$$\begin{array}{c|c|c|c} & a & b & \\ \hline a & (2,2) & (0,0) & p \\ \hline b & (0,0) & (1,1) & 1-p \\ \hline & q & 1-q & \end{array}$$

$p = \sigma_1(a)$: probabilité que le joueur 1 joue l'action a

$q = \sigma_2(a)$: probabilité que le joueur 2 joue l'action a

Si $p \in \{0,1\}$ on retrouve les deux EN en stratégies pures (a,a) et (b,b)

Si $0 < p < 1$ alors le joueur 1 doit être indifférent

$$a \xrightarrow{1} u_1(a,\sigma_2) = 2q + 0(1-q) = 2q$$

$$b \xrightarrow{1} u_1(b,\sigma_2) = 0q + 1(1-q)$$

Jeu de coordination.

$$\begin{array}{c|c|c|c} & a & b & \\ \hline a & (2,2) & (0,0) & p \\ \hline b & (0,0) & (1,1) & 1-p \\ \hline & q & 1-q & \end{array}$$

$p = \sigma_1(a)$: probabilité que le joueur 1 joue l'action a

$q = \sigma_2(a)$: probabilité que le joueur 2 joue l'action a

Si $p \in \{0, 1\}$ on retrouve les deux EN en stratégies pures (a, a) et (b, b)

Si $0 < p < 1$ alors le joueur 1 doit être indifférent

$$a \xrightarrow{1} u_1(a, \sigma_2) = 2q + 0(1-q) = 2q$$

$$b \xrightarrow{1} u_1(b, \sigma_2) = 0q + 1(1-q) = 1-q$$

Jeu de coordination.

	a	b	
a	$(2,2)$	$(0,0)$	p
b	$(0,0)$	$(1,1)$	$1-p$
	q	$1-q$	

$p = \sigma_1(a)$: probabilité que le joueur 1 joue l'action a

$q = \sigma_2(a)$: probabilité que le joueur 2 joue l'action a

Si $p \in \{0,1\}$ on retrouve les deux EN en stratégies pures (a,a) et (b,b)

Si $0 < p < 1$ alors le joueur 1 doit être indifférent

$$a \xrightarrow{1} u_1(a,\sigma_2) = 2q + 0(1-q) = 2q$$

$$b \xrightarrow{1} u_1(b,\sigma_2) = 0q + 1(1-q) = 1-q$$

donc $a \sim_1 b \Leftrightarrow 2q = 1-q \Leftrightarrow q = \frac{1}{3}$

Jeu de coordination.

$$\begin{array}{c|c|c|c} & a & b & \\ \hline a & (2,2) & (0,0) & p \\ \hline b & (0,0) & (1,1) & 1-p \\ \hline & q & 1-q & \end{array}$$

$p = \sigma_1(a)$: probabilité que le joueur 1 joue l'action a

$q = \sigma_2(a)$: probabilité que le joueur 2 joue l'action a

Si $p \in \{0, 1\}$ on retrouve les deux EN en stratégies pures (a, a) et (b, b)

Si $0 < p < 1$ alors le joueur 1 doit être indifférent

$$a \xrightarrow{1} u_1(a, \sigma_2) = 2q + 0(1-q) = 2q$$

$$b \xrightarrow{1} u_1(b, \sigma_2) = 0q + 1(1-q) = 1-q$$

donc $a \sim_1 b \Leftrightarrow 2q = 1 - q \Leftrightarrow q = \frac{1}{3}$

Le joueur 2 joue $\sigma_2(a) = q = 1/3$ s'il est aussi indifférent. Par symétrie $p = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow$ EN en stratégies mixtes non dégénérées :

$$\sigma = \left(\begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \right)$$

$\Rightarrow$ EN en stratégies mixtes non dégénérées :

$$\sigma = \left(\begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \right)$$

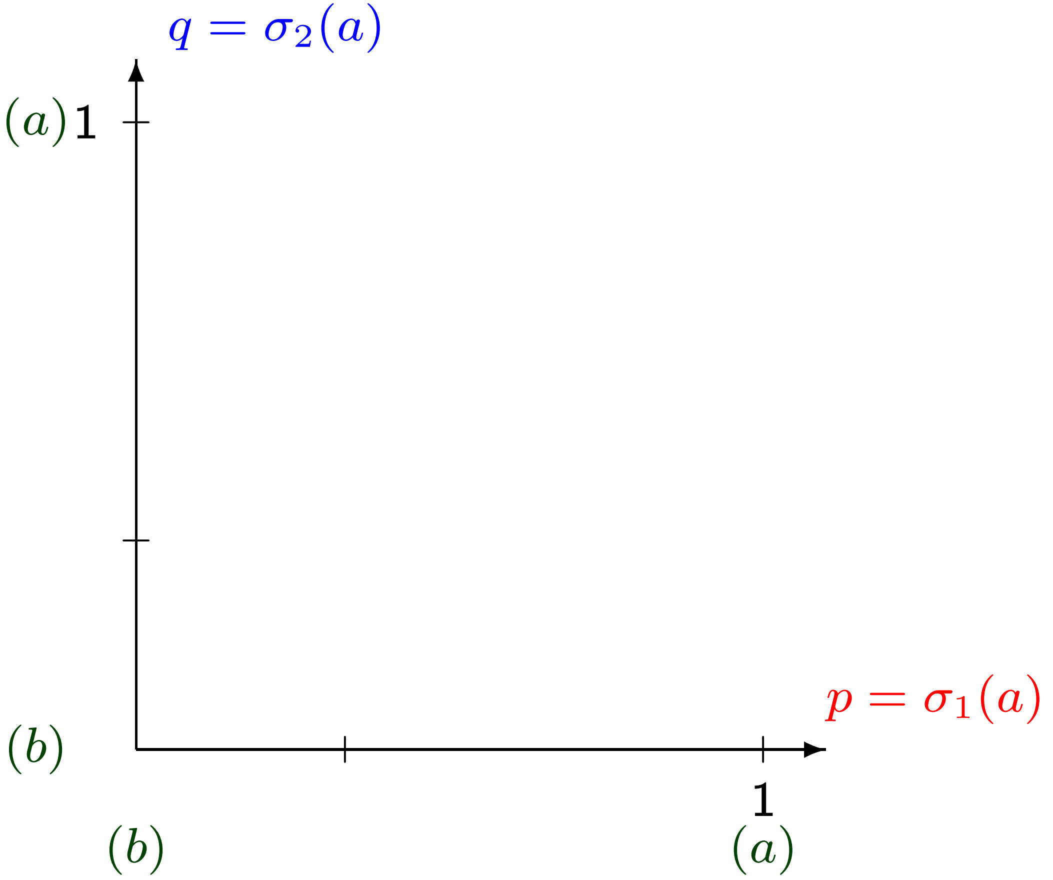
$\Rightarrow$ Trois équilibres de Nash, dont deux en stratégies pures

Correspondances de meilleure réponse :

$$\mathrm{MR}_i(\sigma_j) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } \sigma_j(a) < \frac{1}{3} \\ [0,1] & \text{si } \sigma_j(a) = \frac{1}{3} \\ \{1\} & \text{si } \sigma_j(a) > \frac{1}{3} \end{cases}, \quad i = 1, 2,\ j \neq i$$

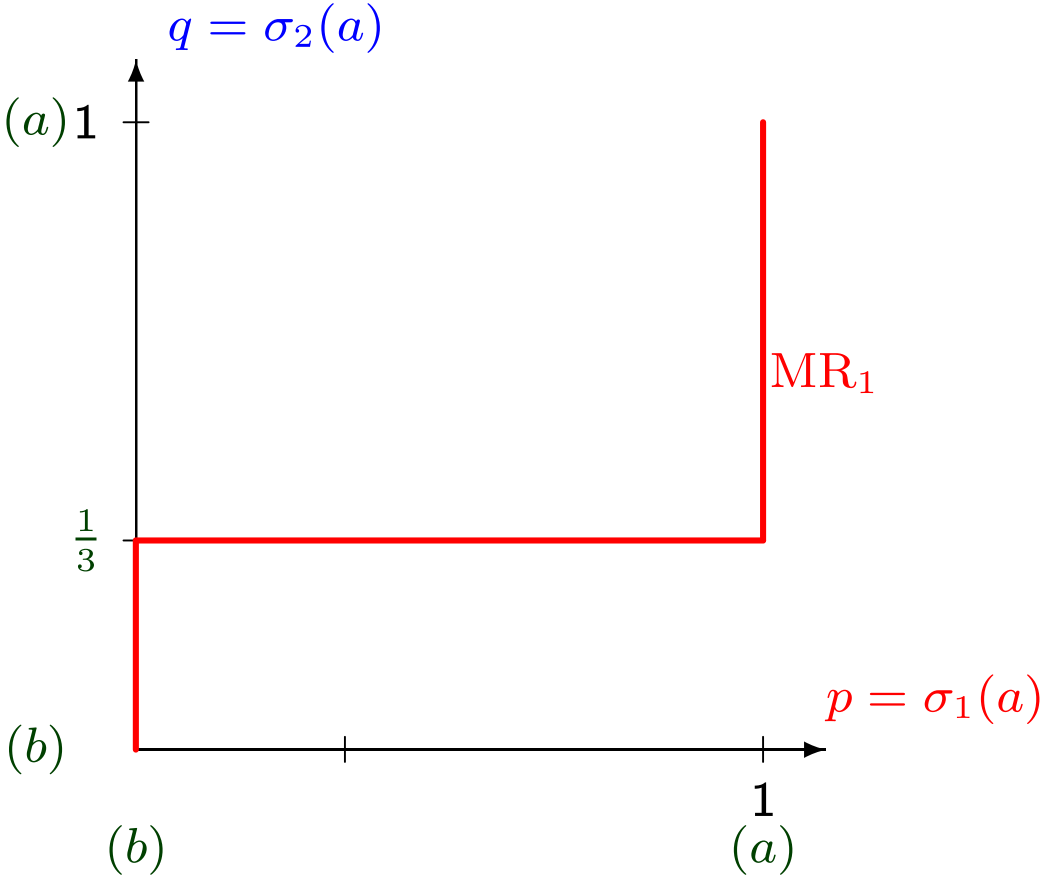
Correspondances de meilleure réponse :

$$\mathrm{MR}_i(\sigma_j) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } \sigma_j(a) < \frac{1}{3} \\ [0,1] & \text{si } \sigma_j(a) = \frac{1}{3} \\ \{1\} & \text{si } \sigma_j(a) > \frac{1}{3} \end{cases}, \quad i = 1, 2, \; j \neq i$$



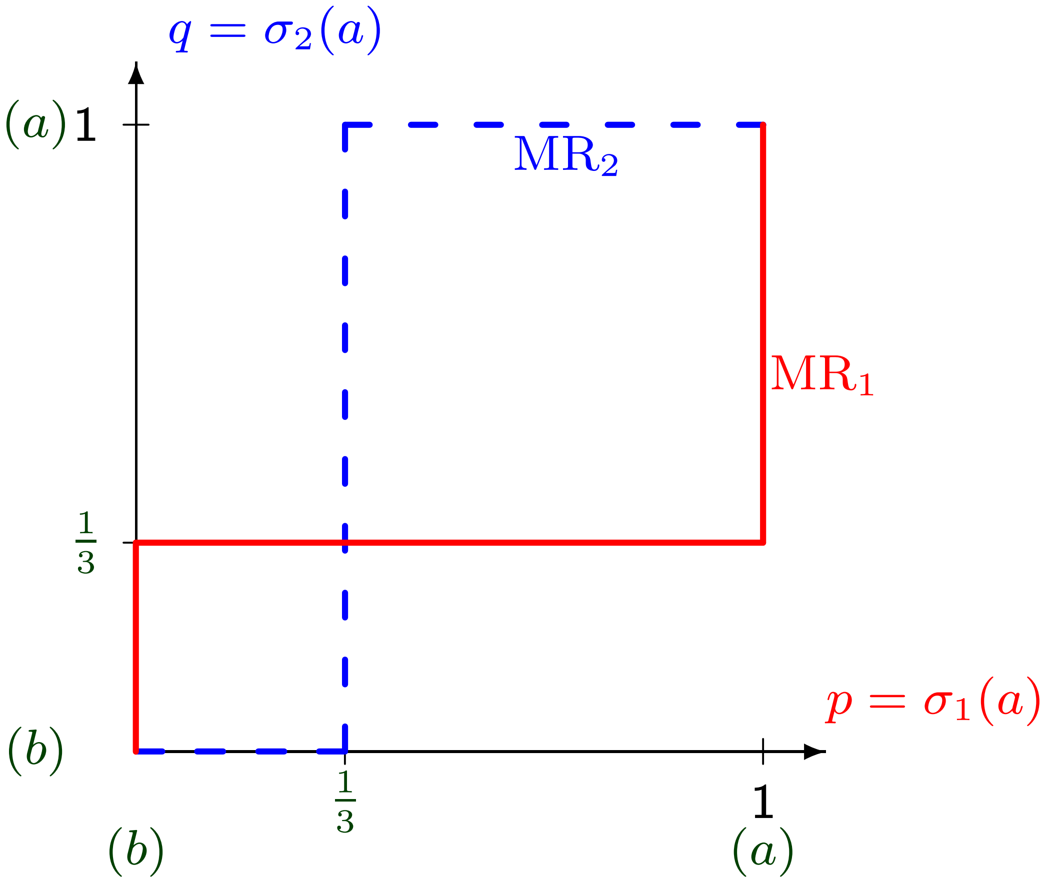
Correspondances de meilleure réponse :

$$\mathrm{MR}_i(\sigma_j) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } \sigma_j(a) < \frac{1}{3} \\ [0,1] & \text{si } \sigma_j(a) = \frac{1}{3} \\ \{1\} & \text{si } \sigma_j(a) > \frac{1}{3} \end{cases}, \quad i = 1, 2,\ j \neq i$$



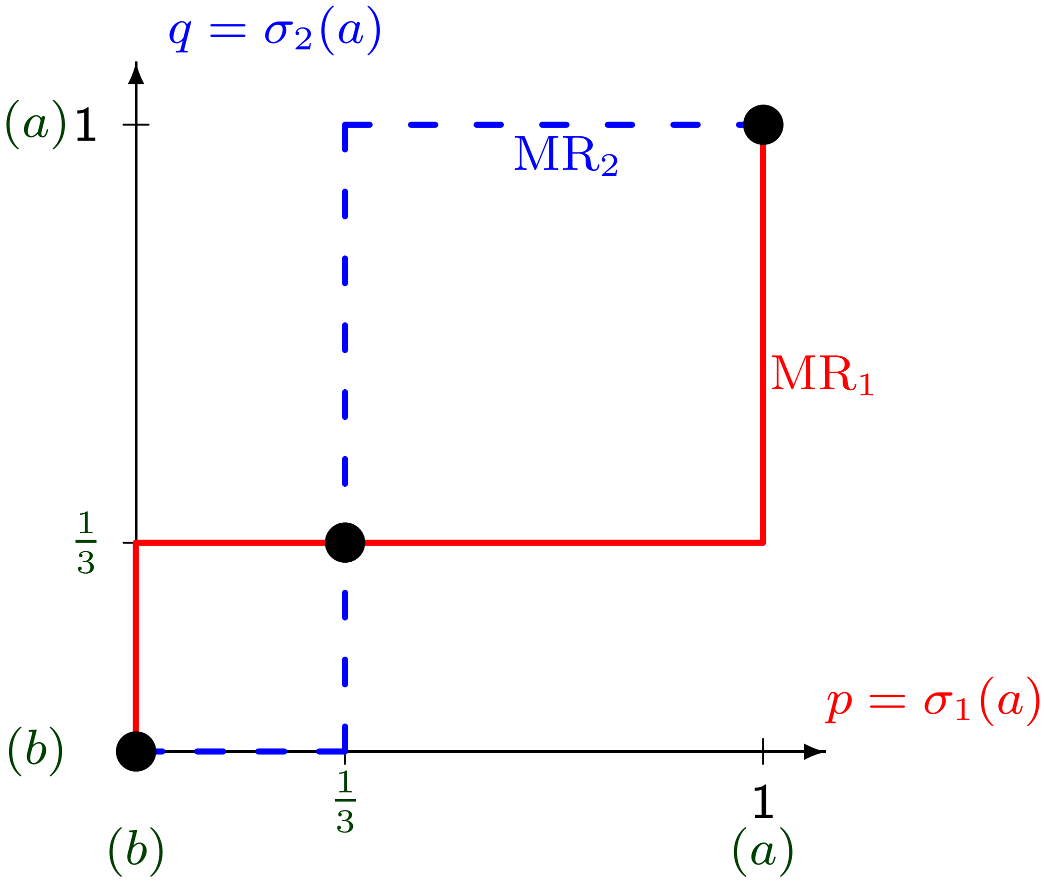
Correspondances de meilleure réponse :

$$\mathrm{MR}_i(\sigma_j) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } \sigma_j(a) < \frac{1}{3} \\ [0,1] & \text{si } \sigma_j(a) = \frac{1}{3} \\ \{1\} & \text{si } \sigma_j(a) > \frac{1}{3} \end{cases}, \quad i = 1, 2,\ j \neq i$$



Correspondances de meilleure réponse :

$$\mathrm{MR}_i(\sigma_j) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } \sigma_j(a) < \frac{1}{3} \\ [0,1] & \text{si } \sigma_j(a) = \frac{1}{3} \\ \{1\} & \text{si } \sigma_j(a) > \frac{1}{3} \end{cases}, \quad i = 1, 2,\ j \neq i$$



Bataille des sexes.

	a	b	
a	$(3,2)$	$(1,1)$	p
b	$(0,0)$	$(2,3)$	$1-p$
	q	$1-q$	

Bataille des sexes.

$$\begin{array}{c|c|c|c} & a & b & \\ \hline a & (3,2) & (1,1) & p \\ \hline b & (0,0) & (2,3) & 1-p \\ \hline & q & 1-q & \end{array}$$

$$a \xrightarrow{1} 3q + (1-q) = 1 + 2q$$

$$b \xrightarrow{1} 2(1-q) = 2 - 2q$$

Bataille des sexes.

$$\begin{array}{c|c|c|c}
 & a & b & \\
\hline
a & (3,2) & (1,1) & p \\
\hline
b & (0,0) & (2,3) & 1-p \\
\hline
 & q & 1-q &
\end{array}$$

$$a \xrightarrow{1} 3q + (1-q) = 1 + 2q$$

$$b \xrightarrow{1} 2(1-q) = 2 - 2q$$

donc $a \sim_1 b \Leftrightarrow 1 + 2q = 2 - 2q \Leftrightarrow q = \frac{1}{4}$

Bataille des sexes.

$$
\begin{array}{c|c|c|c}
 & a & b & \\
\hline
a & (3,2) & (1,1) & p \\
\hline
b & (0,0) & (2,3) & 1-p \\
\hline
 & q & 1-q &
\end{array}
$$

$$a \xrightarrow{1} 3q + (1-q) = 1 + 2q$$

$$b \xrightarrow{1} 2(1-q) = 2 - 2q$$

donc $a \sim_1 b \Leftrightarrow 1 + 2q = 2 - 2q \Leftrightarrow q = \frac{1}{4}$

$$a \xrightarrow{2} 2p$$

$$b \xrightarrow{2} p + 3(1-p) = 3 - 2p$$

Bataille des sexes.

$$\begin{array}{c|c|c|c} & a & b & \\ \hline a & (3,2) & (1,1) & p \\ \hline b & (0,0) & (2,3) & 1-p \\ \hline & q & 1-q & \end{array}$$

$$a \xrightarrow{1} 3q + (1-q) = 1 + 2q$$

$$b \xrightarrow{1} 2(1-q) = 2 - 2q$$

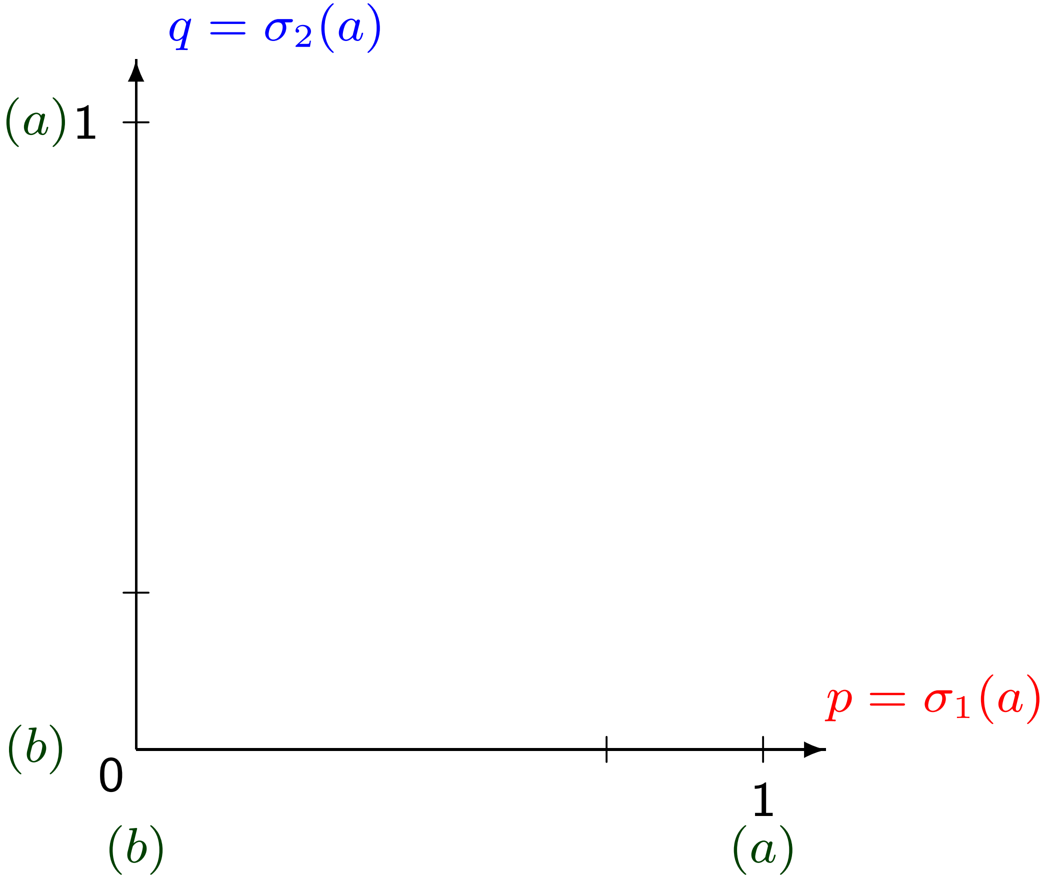
donc $a \sim_1 b \Leftrightarrow 1 + 2q = 2 - 2q \Leftrightarrow q = \frac{1}{4}$

$$a \xrightarrow{2} 2p$$

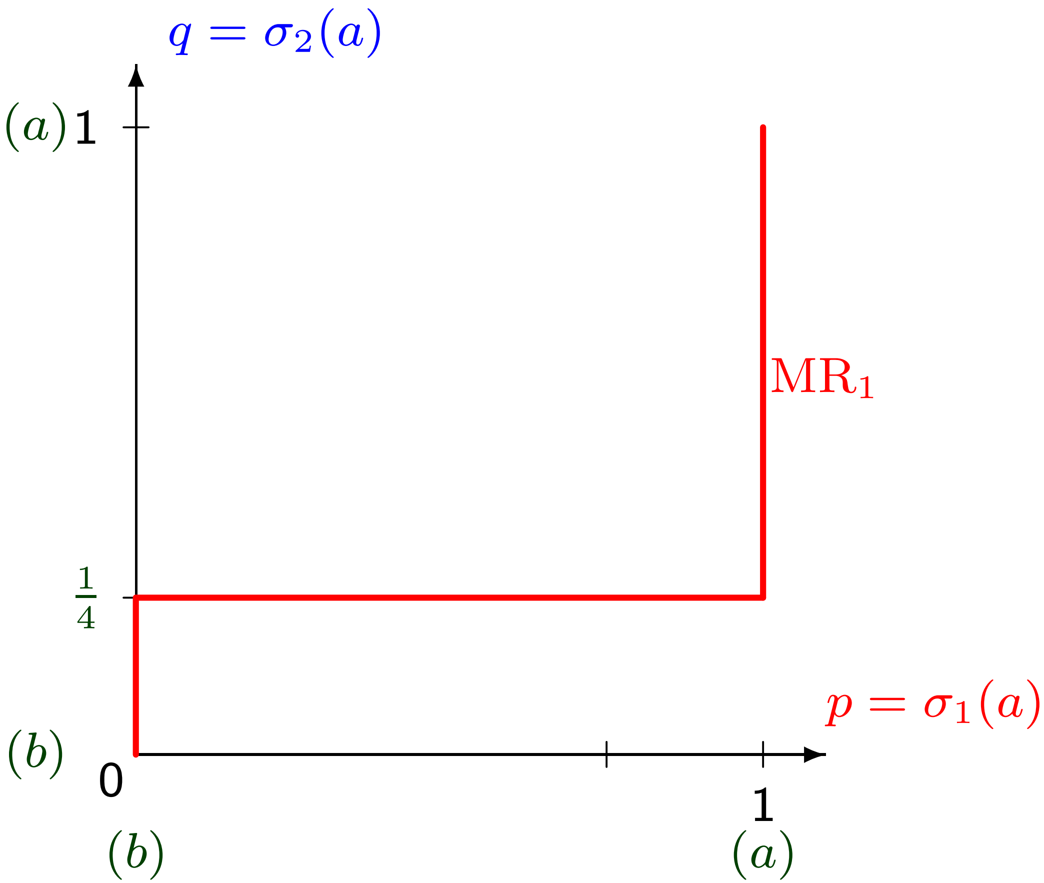
$$b \xrightarrow{2} p + 3(1-p) = 3 - 2p$$

donc $a \sim_2 b \Leftrightarrow p = \frac{3}{4}$

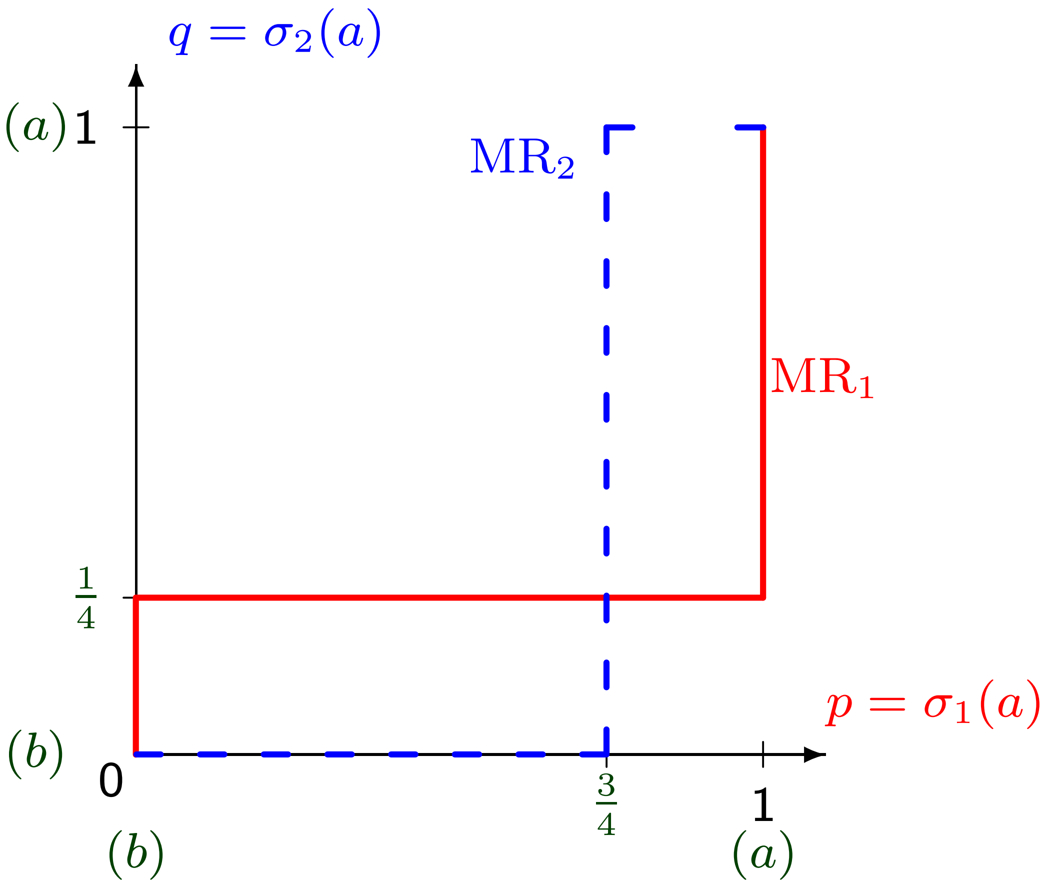
	a	b	
a	$(3, 2)$	$(1, 1)$	p
b	$(0, 0)$	$(2, 3)$	$1 - p$
	q	$1 - q$	



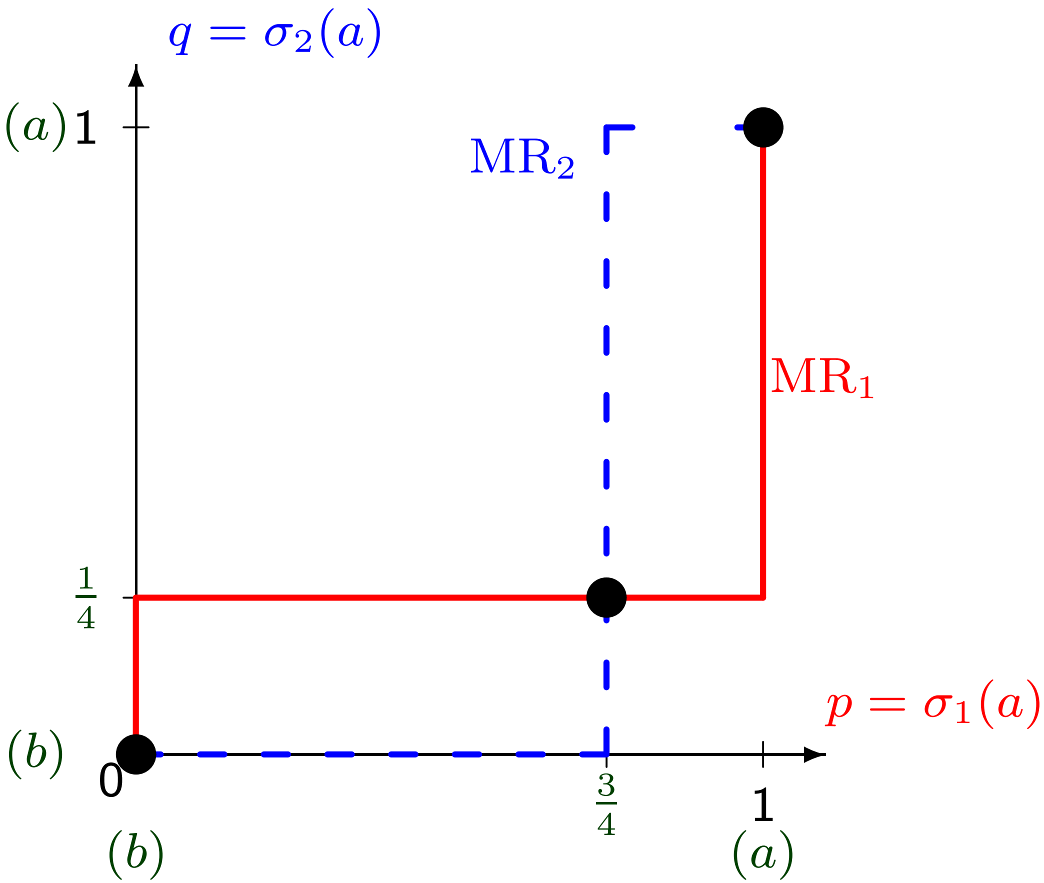
	a	b	
a	$(3,2)$	$(1,1)$	p
b	$(0,0)$	$(2,3)$	$1-p$
	q	$1-q$	



	a	b	
a	$(3,2)$	$(1,1)$	p
b	$(0,0)$	$(2,3)$	$1-p$
	q	$1-q$	



	a	b	
a	$(3,2)$	$(1,1)$	p
b	$(0,0)$	$(2,3)$	$1-p$
	q	$1-q$	



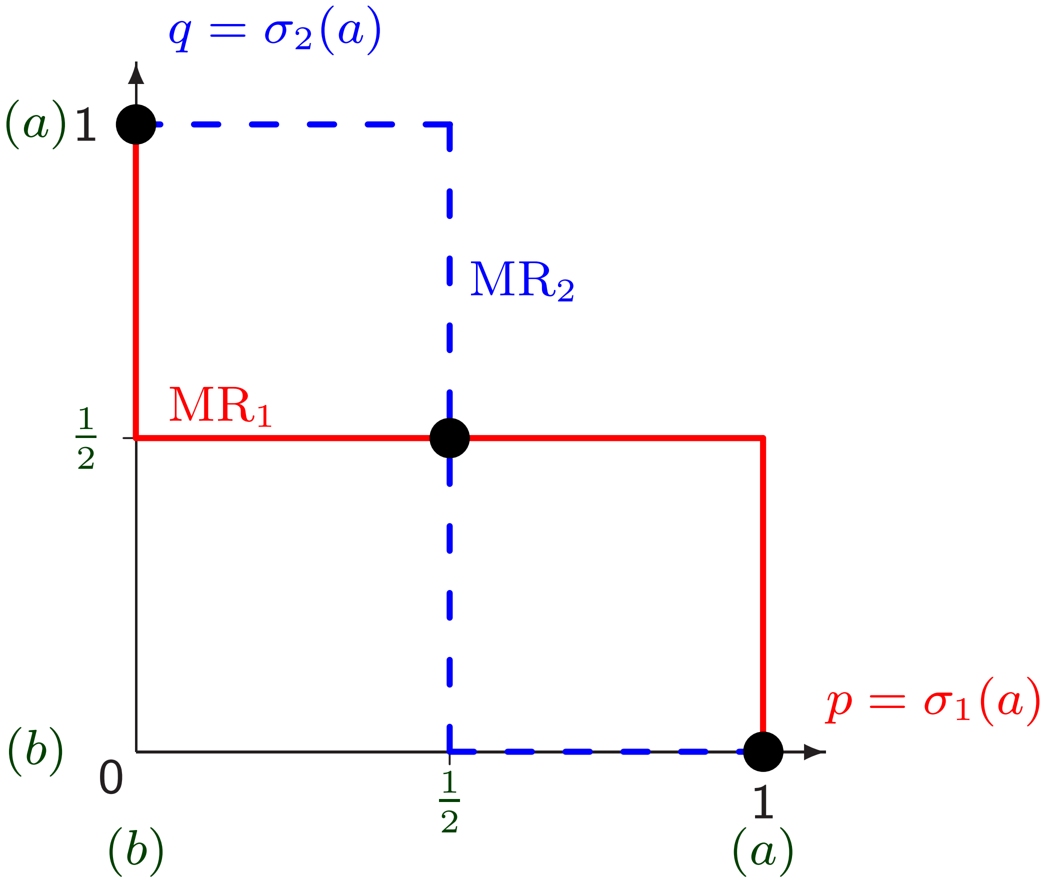
Poule mouillée.

Poule mouillée.

	a	b	
a	$(2,2)$	$(1,3)$	p
b	$(3,1)$	$(0,0)$	$1-p$
	q	$1-q$	

Poule mouillée.

	a	b	
a	$(2,2)$	$(1,3)$	p
b	$(3,1)$	$(0,0)$	$1-p$
	q	$1-q$	



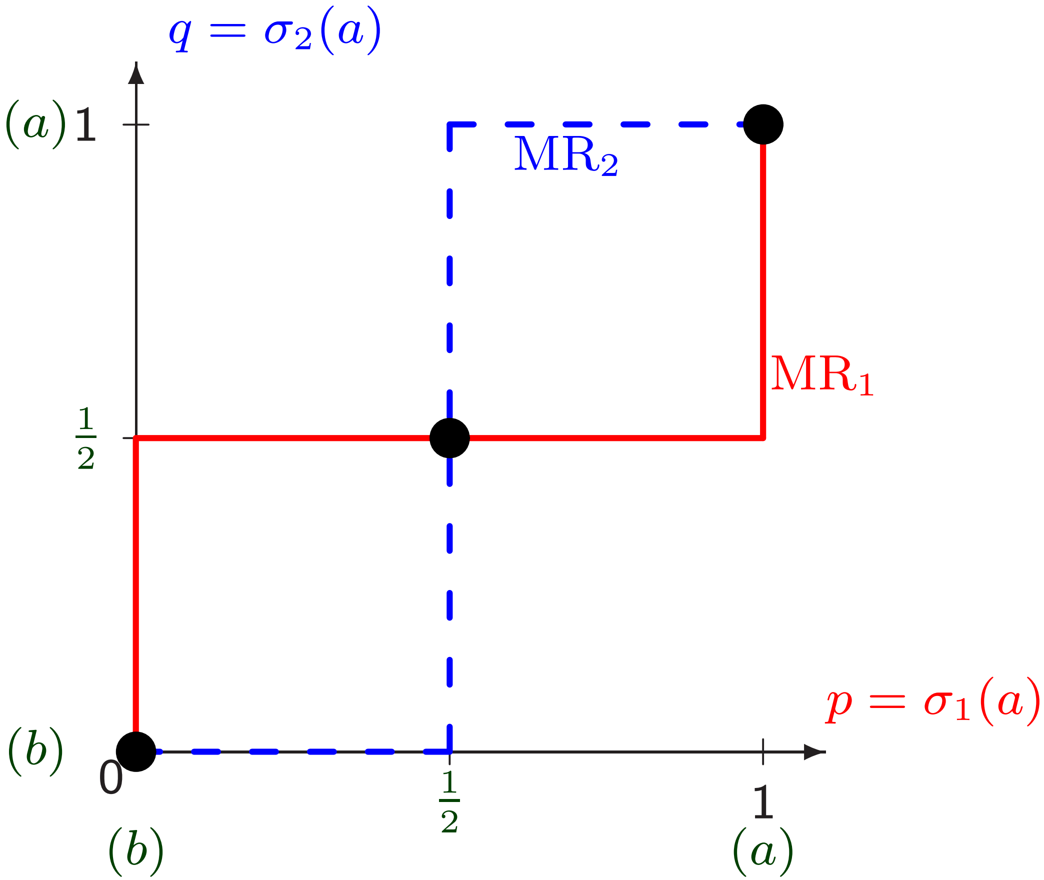
Chasse au cerf.

Chasse au cerf.

$$
\begin{array}{c|c|c|c}
 & a & b & \\
\hline
a & (3,3) & (0,2) & p \\
\hline
b & (2,0) & (1,1) & 1-p \\
\hline
 & q & 1-q &
\end{array}
$$

Chasse au cerf.

	a	b	
a	$(3,3)$	$(0,2)$	p
b	$(2,0)$	$(1,1)$	$1-p$
	q	$1-q$	



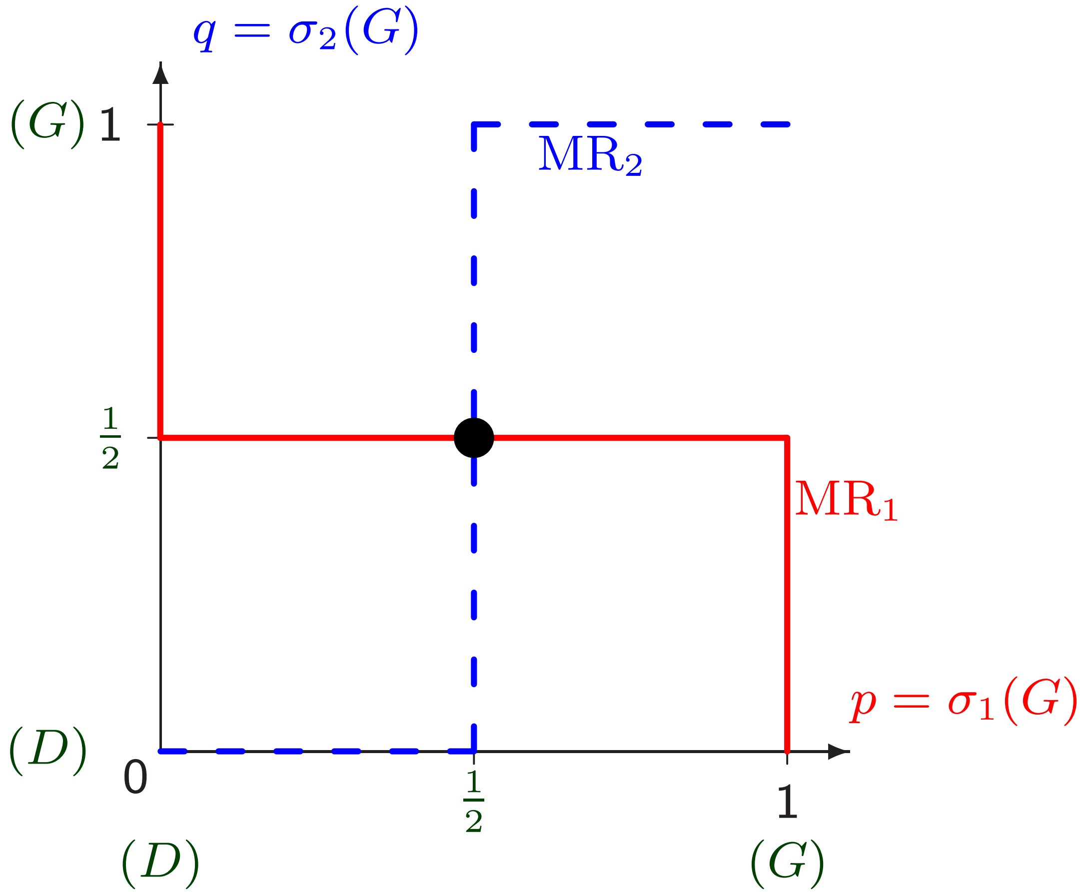
Cache bouton.

Cache bouton.

$$\begin{array}{c|c|c|c} & G & D & \\ \hline G & (-1,1) & (1,-1) & p \\ \hline D & (1,-1) & (-1,1) & 1-p \\ \hline & q & 1-q & \end{array}$$

Cache bouton.

	G	D	
G	$(-1,1)$	$(1,-1)$	p
D	$(1,-1)$	$(-1,1)$	$1-p$
	q	$1-q$	



Feuille, pierre, ciseaux.

Feuille, pierre, ciseaux.

	F	P	C	
F	$(0,0)$	$(1,-1)$	$(-1,1)$	a
P	$(-1,1)$	$(0,0)$	$(1,-1)$	b
C	$(1,-1)$	$(-1,1)$	$(0,0)$	c
	p	q	r	

Feuille, pierre, ciseaux.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c}
 & F & P & C & \\
\hline
F & (0,0) & (1,-1) & (-1,1) & a \\
\hline
P & (-1,1) & (0,0) & (1,-1) & b \\
\hline
C & (1,-1) & (-1,1) & (0,0) & c \\
\hline
 & p & q & r &
\end{array}$$

➢ EN en stratégies pures ?

Feuille, pierre, ciseaux.

	F	P	C	
F	$(0,0)$	$(1,-1)$	$(-1,1)$	a
P	$(-1,1)$	$(0,0)$	$(1,-1)$	b
C	$(1,-1)$	$(-1,1)$	$(0,0)$	c
	p	q	r	

➢ EN en stratégies pures ? NON

Feuille, pierre, ciseaux.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} & F & P & C & \\ \hline F & (0,0) & (1,-1) & (-1,1) & a \\ \hline P & (-1,1) & (0,0) & (1,-1) & b \\ \hline C & (1,-1) & (-1,1) & (0,0) & c \\ \hline & p & q & r & \end{array}$$

➢ EN en stratégies pures ? NON

➢ EN où un des joueurs joue uniquement deux actions avec des probabilités strictement positives ?

Feuille, pierre, ciseaux.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} & F & P & C & \\ \hline F & (0,0) & (1,-1) & (-1,1) & a \\ \hline P & (-1,1) & (0,0) & (1,-1) & b \\ \hline C & (1,-1) & (-1,1) & (0,0) & c \\ \hline & p & q & r & \end{array}$$

➢ EN en stratégies pures ? NON

➢ EN où un des joueurs joue uniquement deux actions avec des probabilités strictement positives ?

Par exemple, $p, q > 0$ et $r = 0$

Feuille, pierre, ciseaux.

	F	P	C	
F	$(0,0)$	$(1,-1)$	$(-1,1)$	a
P	$(-1,1)$	$(0,0)$	$(1,-1)$	b
C	$(1,-1)$	$(-1,1)$	$(0,0)$	c
	p	q	r	

➢ EN en stratégies pures ? NON

➢ EN où un des joueurs joue uniquement deux actions avec des probabilités strictement positives ?

Par exemple, $p, q > 0$ et $r = 0 \Rightarrow$ Le joueur 1 ne joue pas P

Feuille, pierre, ciseaux.

	F	P	C	
F	$(0,0)$	$(1,-1)$	$(-1,1)$	a
P	$(-1,1)$	$(0,0)$	$(1,-1)$	b
C	$(1,-1)$	$(-1,1)$	$(0,0)$	c
	p	q	r	

➢ EN en stratégies pures ? NON

➢ EN où un des joueurs joue uniquement deux actions avec des probabilités strictement positives ?

Par exemple, $p, q > 0$ et $r = 0 \Rightarrow$ Le joueur 1 ne joue pas P

$\Rightarrow$ Le joueur 2 ne joue pas F, contradiction

Feuille, pierre, ciseaux.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} & F & P & C & \\ \hline F & (0,0) & (1,-1) & (-1,1) & a \\ \hline P & (-1,1) & (0,0) & (1,-1) & b \\ \hline C & (1,-1) & (-1,1) & (0,0) & c \\ \hline & p & q & r & \end{array}$$

➢ EN en stratégies pures ? NON

➢ EN où un des joueurs joue uniquement deux actions avec des probabilités strictement positives ?

Par exemple, $p, q > 0$ et $r = 0 \Rightarrow$ Le joueur 1 ne joue pas P

$\Rightarrow$ Le joueur 2 ne joue pas F, contradiction

➢ EN où les joueurs jouent les 3 actions avec une probabilité strictement positive ?

Feuille, pierre, ciseaux.

	F	P	C	
F	$(0,0)$	$(1,-1)$	$(-1,1)$	a
P	$(-1,1)$	$(0,0)$	$(1,-1)$	b
C	$(1,-1)$	$(-1,1)$	$(0,0)$	c
	p	q	r	

➢ EN en stratégies pures ? NON

➢ EN où un des joueurs joue uniquement deux actions avec des probabilités strictement positives ?

Par exemple, $p, q > 0$ et $r = 0 \Rightarrow$ Le joueur 1 ne joue pas P

$\Rightarrow$ Le joueur 2 ne joue pas F, contradiction

➢ EN où les joueurs jouent les 3 actions avec une probabilité strictement positive ? OUI

Feuille, pierre, ciseaux.

	F	P	C	
F	$(0,0)$	$(1,-1)$	$(-1,1)$	a
P	$(-1,1)$	$(0,0)$	$(1,-1)$	b
C	$(1,-1)$	$(-1,1)$	$(0,0)$	c
	p	q	r	

➢ EN en stratégies pures ? NON

➢ EN où un des joueurs joue uniquement deux actions avec des probabilités strictement positives ?

Par exemple, $p, q > 0$ et $r = 0 \Rightarrow$ Le joueur 1 ne joue pas P

$\Rightarrow$ Le joueur 2 ne joue pas F, contradiction

➢ EN où les joueurs jouent les 3 actions avec une probabilité strictement positive ? OUI, car $\exists$ au moins un EN :

Feuille, pierre, ciseaux.

	F	P	C	
F	$(0,0)$	$(1,-1)$	$(-1,1)$	a
P	$(-1,1)$	$(0,0)$	$(1,-1)$	b
C	$(1,-1)$	$(-1,1)$	$(0,0)$	c
	p	q	r	

➢ EN en stratégies pures ? NON

➢ EN où un des joueurs joue uniquement deux actions avec des probabilités strictement positives ?

Par exemple, $p, q > 0$ et $r = 0 \Rightarrow$ Le joueur 1 ne joue pas P

$\Rightarrow$ Le joueur 2 ne joue pas F, contradiction

➢ EN où les joueurs jouent les 3 actions avec une probabilité strictement positive ?
OUI, car $\exists$ au moins un EN : $b - c = -a + c = a - b$ et $q - r = r - p = p - q$

Feuille, pierre, ciseaux.

	F	P	C	
F	$(0,0)$	$(1,-1)$	$(-1,1)$	a
P	$(-1,1)$	$(0,0)$	$(1,-1)$	b
C	$(1,-1)$	$(-1,1)$	$(0,0)$	c
	p	q	r	

➢ EN en stratégies pures ? NON

➢ EN où un des joueurs joue uniquement deux actions avec des probabilités strictement positives ?

Par exemple, $p, q > 0$ et $r = 0 \Rightarrow$ Le joueur 1 ne joue pas P

$\Rightarrow$ Le joueur 2 ne joue pas F, contradiction

➢ EN où les joueurs jouent les 3 actions avec une probabilité strictement positive ?
OUI, car $\exists$ au moins un EN : $b - c = -a + c = a - b$ et $q - r = r - p = p - q$

$$\Rightarrow \quad a = b = c = 1/3 \ \text{ et } \ p = q = r = 1/3$$

Le dilemme du volontaire

Le dilemme du volontaire

New York Times, vendredi 27 mars 1964 :

"*37 Who Saw Murder Didn't Call the Police*"

Le dilemme du volontaire

New York Times, vendredi 27 mars 1964 :

"*37 Who Saw Murder Didn't Call the Police*"

On a parfois observé que lorsque le nombre de témoins augmente, non seulement la probabilité que chaque individu intervienne diminue, mais également la probabilité qu'au moins une personne offre son assistance

Le dilemme du volontaire

New York Times, vendredi 27 mars 1964 :

"*37 Who Saw Murder Didn't Call the Police*"

On a parfois observé que lorsque le nombre de témoins augmente, non seulement la probabilité que chaque individu intervienne diminue, mais également la probabilité qu'au moins une personne offre son assistance

Trois explications ont été avancées :

Le dilemme du volontaire

New York Times, vendredi 27 mars 1964 :

"*37 Who Saw Murder Didn't Call the Police*"

On a parfois observé que lorsque le nombre de témoins augmente, non seulement la probabilité que chaque individu intervienne diminue, mais également la probabilité qu'au moins une personne offre son assistance

Trois explications ont été avancées :

- la diffusion de la responsabilité

Le dilemme du volontaire

New York Times, vendredi 27 mars 1964 :

"*37 Who Saw Murder Didn't Call the Police*"

On a parfois observé que lorsque le nombre de témoins augmente, non seulement la probabilité que chaque individu intervienne diminue, mais également la probabilité qu'au moins une personne offre son assistance

Trois explications ont été avancées :

- la diffusion de la responsabilité
- la peur d'une évaluation négative (déviation de la norme)

Le dilemme du volontaire

New York Times, vendredi 27 mars 1964 :

"*37 Who Saw Murder Didn't Call the Police*"

On a parfois observé que lorsque le nombre de témoins augmente, non seulement la probabilité que chaque individu intervienne diminue, mais également la probabilité qu'au moins une personne offre son assistance

Trois explications ont été avancées :

- la diffusion de la responsabilité
- la peur d'une évaluation négative (déviation de la norme)
- l'influence sociale

Le dilemme du volontaire

New York Times, vendredi 27 mars 1964 :

"*37 Who Saw Murder Didn't Call the Police*"

On a parfois observé que lorsque le nombre de témoins augmente, non seulement la probabilité que chaque individu intervienne diminue, mais également la probabilité qu'au moins une personne offre son assistance

Trois explications ont été avancées :

- ➢ la diffusion de la responsabilité
- ➢ la peur d'une évaluation négative (déviation de la norme)
- ➢ l'influence sociale

☛ Toutes reposent sur l'impact du nombre de témoins sur les coûts ou les bénéfices espérés d'une intervention


"RAPED. TORTURED. KILLED. HERE. IN NEW YORK. OUTSIDE HER OWN APARTMENT BUILDING.
"ALMOST FORTY NEIGHBORS HEARD SCREAMS. NOBODY DID ANYTHING. NOBODY CALLED COPS. SOME OF THEM EVEN WATCHED. DO YOU UNDERSTAND?

Une explication par la théorie des jeux.

- n joueurs (témoins)

Une explication par la théorie des jeux.

- n joueurs (témoins)
- Deux actions : appeler la police (action A) ou ne rien faire (action N)

Une explication par la théorie des jeux.

- n joueurs (témoins)
- Deux actions : appeler la police (action A) ou ne rien faire (action N)
- Préférences : chaque joueur accorde une valeur v au fait que la police soit prévenue, et supporte un coût c s'il est amené à prévenir lui même la police, où

$$v > c > 0$$

Une explication par la théorie des jeux.

- n joueurs (témoins)
- Deux actions : appeler la police (action A) ou ne rien faire (action N)
- Préférences : chaque joueur accorde une valeur v au fait que la police soit prévenue, et supporte un coût c s'il est amené à prévenir lui même la police, où

$$v > c > 0$$

➥ n équilibres de Nash en stratégies pures (exactement un joueur appelle la police)

Une explication par la théorie des jeux.

- n joueurs (témoins)
- Deux actions : appeler la police (action A) ou ne rien faire (action N)
- Préférences : chaque joueur accorde une valeur v au fait que la police soit prévenue, et supporte un coût c s'il est amené à prévenir lui même la police, où

$$v > c > 0$$

➥ n équilibres de Nash en stratégies pures (exactement un joueur appelle la police)

Mais coordination vers un de ces équilibres asymétriques difficile en pratique (sauf si communication ou joueurs hétérogènes)

Seul équilibre symétrique possible : en stratégies mixtes (non dégénérées)

Seul équilibre symétrique possible : en stratégies mixtes (non dégénérées)

$\sigma_i(A) = q \in (0,1)$: probabilité que le joueur i appelle la police, $i = 1, \ldots, n$

Seul équilibre symétrique possible : en stratégies mixtes (non dégénérées)

$\sigma_i(A) = q \in (0, 1)$: probabilité que le joueur i appelle la police, $i = 1, \ldots, n$

☞ Chaque joueur doit être indifférent entre les deux décisions

Seul équilibre symétrique possible : en stratégies mixtes (non dégénérées)

$\sigma_i(A) = q \in (0,1)$: probabilité que le joueur i appelle la police, $i = 1, \ldots, n$

☞ Chaque joueur doit être indifférent entre les deux décisions

$$A \xrightarrow{i} v - c$$

$$N \xrightarrow{i} 0 \ \mathrm{Pr}(\text{personne n'appelle}) + v \ \mathrm{Pr}(\text{au moins une personne appelle})$$

Seul équilibre symétrique possible : en stratégies mixtes (non dégénérées)

$\sigma_i(A) = q \in (0,1)$: probabilité que le joueur i appelle la police, $i = 1, \ldots, n$

☞ Chaque joueur doit être indifférent entre les deux décisions

$$A \xrightarrow{i} v - c$$

$$N \xrightarrow{i} 0 \ \Pr(\text{personne n'appelle}) + v \ \Pr(\text{au moins une personne appelle})$$

donc $A \sim_i N \iff v - c = v[1 - (1-q)^{n-1}]$

Seul équilibre symétrique possible : en stratégies mixtes (non dégénérées)

$\sigma_i(A) = q \in (0,1)$: probabilité que le joueur i appelle la police, $i = 1, \ldots, n$

☞ Chaque joueur doit être indifférent entre les deux décisions

$$A \xrightarrow{i} v - c$$

$$N \xrightarrow{i} 0 \ \mathrm{Pr}(\text{personne n'appelle}) + v \ \mathrm{Pr}(\text{au moins une personne appelle})$$

donc $A \sim_i N \;\Leftrightarrow\; v - c = v[1 - (1-q)^{n-1}]$

$$\Rightarrow \quad q = 1 - (c/v)^{1/n-1}$$

Seul équilibre symétrique possible : en stratégies mixtes (non dégénérées)

$\sigma_i(A) = q \in (0,1)$: probabilité que le joueur i appelle la police, $i = 1, \ldots, n$

☞ Chaque joueur doit être indifférent entre les deux décisions

$$A \xrightarrow{i} v - c$$

$$N \xrightarrow{i} 0 \ \mathrm{Pr}(\text{personne n'appelle}) + v \ \mathrm{Pr}(\text{au moins une personne appelle})$$

donc $A \sim_i N \iff v - c = v[1 - (1-q)^{n-1}]$

$$\Rightarrow \quad q = 1 - (c/v)^{1/n-1}$$

✔ $\mathrm{Pr}(\text{1 personne donnée appelle}) = 1 - (c/v)^{1/n-1}$ décroît avec n

Seul équilibre symétrique possible : en stratégies mixtes (non dégénérées)

$\sigma_i(A) = q \in (0,1)$: probabilité que le joueur i appelle la police, $i = 1, \ldots, n$

☞ Chaque joueur doit être indifférent entre les deux décisions

$$A \xrightarrow{i} v - c$$

$$N \xrightarrow{i} 0 \ \mathrm{Pr}(\text{personne n'appelle}) + v \ \mathrm{Pr}(\text{au moins une personne appelle})$$

donc $A \sim_i N \ \Leftrightarrow \ v - c = v[1 - (1-q)^{n-1}]$

$$\Rightarrow \quad q = 1 - (c/v)^{1/n-1}$$

✔ $\mathrm{Pr}(\text{1 personne donnée appelle}) = 1 - (c/v)^{1/n-1}$ décroît avec n

✔ $\mathrm{Pr}(\text{1 personne au moins appelle}) = 1 - (1-q)^n = 1 - (c/v)^{n/n-1}$ décroît avec n !

Chercher tous les équilibres de Nash

Chercher tous les équilibres de Nash

	A	B	C
a	$3, 2$	$1, 1$	$0, 1.5$
b	$0, 0$	$2, 3$	$1, 2$

FIG. 1 – Une variante du jeu de la bataille des sexes

Chercher tous les équilibres de Nash

	A	B	C
a	$3, 2$	$1, 1$	$0, 1.5$
b	$0, 0$	$2, 3$	$1, 2$

FIG. 1 – Une variante du jeu de la bataille des sexes

Deux équilibres en stratégies pures : (a, A) et (b, B)

Chercher tous les équilibres de Nash

	A	B	C
a	$3, 2$	$1, 1$	$0, 1.5$
b	$0, 0$	$2, 3$	$1, 2$

FIG. 1 – Une variante du jeu de la bataille des sexes

Deux équilibres en stratégies pures : (a, A) et (b, B)

Comment trouver tous les autres équilibres de Nash ?

Chercher tous les équilibres de Nash

	A	B	C
a	$3, 2$	$1, 1$	$0, 1.5$
b	$0, 0$	$2, 3$	$1, 2$

FIG. 1 – Une variante du jeu de la bataille des sexes

Deux équilibres en stratégies pures : (a, A) et (b, B)

Comment trouver tous les autres équilibres de Nash ?

☞ Considérer tous les supports d'équilibre possibles pour le joueur 1, et dans chaque cas considérer tous les supports possibles du joueur 2

Chercher tous les équilibres de Nash

	A	B	C
a	$3, 2$	$1, 1$	$0, 1.5$
b	$0, 0$	$2, 3$	$1, 2$

FIG. 1 – Une variante du jeu de la bataille des sexes

Deux équilibres en stratégies pures : (a, A) et (b, B)

Comment trouver tous les autres équilibres de Nash ?

☞ Considérer tous les supports d'équilibre possibles pour le joueur 1, et dans chaque cas considérer tous les supports possibles du joueur 2

Notons p la probabilité que le joueur 1 choisisse l'action a

	A	B	C
a	$3, 2$	$1, 1$	$0, 1.5$
b	$0, 0$	$2, 3$	$1, 2$

	A	B	C
a	$3, 2$	$1, 1$	$0, 1.5$
b	$0, 0$	$2, 3$	$1, 2$

1 joue a ($p = 1$) $\Rightarrow$ 2 n'est jamais indifférent $\Rightarrow$ seul équilibre possible (a, A)

	A	B	C
a	$3, 2$	$1, 1$	$0, 1.5$
b	$0, 0$	$2, 3$	$1, 2$

1 joue a ($p = 1$) $\Rightarrow$ 2 n'est jamais indifférent $\Rightarrow$ seul équilibre possible (a, A)

1 joue b ($p = 0$) $\Rightarrow$ 2 n'est jamais indifférent $\Rightarrow$ seul équilibre possible (b, B)

	A	B	C
a	$3, 2$	$1, 1$	$0, 1.5$
b	$0, 0$	$2, 3$	$1, 2$

1 joue a ($p = 1$) $\Rightarrow$ 2 n'est jamais indifférent $\Rightarrow$ seul équilibre possible (a, A)

1 joue b ($p = 0$) $\Rightarrow$ 2 n'est jamais indifférent $\Rightarrow$ seul équilibre possible (b, B)

1 joue a *et* b *avec probabilités positives* ($0 < p < 1$)

	A	B	C
a	$3, 2$	$1, 1$	$0, 1.5$
b	$0, 0$	$2, 3$	$1, 2$

1 joue a ($p = 1$) $\Rightarrow$ 2 n'est jamais indifférent $\Rightarrow$ seul équilibre possible (a, A)

1 joue b ($p = 0$) $\Rightarrow$ 2 n'est jamais indifférent $\Rightarrow$ seul équilibre possible (b, B)

1 joue a *et* b *avec probabilités positives* ($0 < p < 1$)

$$\Rightarrow \quad A \xrightarrow{2} 2\,p$$

$$B \xrightarrow{2} 3 - 2\,p$$

$$C \xrightarrow{2} 2 - p/2.$$

	A	B	C
a	$3, 2$	$1, 1$	$0, 1.5$
b	$0, 0$	$2, 3$	$1, 2$

1 joue a ($p = 1$) $\Rightarrow$ 2 n'est jamais indifférent $\Rightarrow$ seul équilibre possible (a, A)

1 joue b ($p = 0$) $\Rightarrow$ 2 n'est jamais indifférent $\Rightarrow$ seul équilibre possible (b, B)

1 joue a *et* b *avec probabilités positives* ($0 < p < 1$)

$$\Rightarrow \quad A \xrightarrow{2} 2\,p$$

$$B \xrightarrow{2} 3 - 2\,p$$

$$C \xrightarrow{2} 2 - p/2.$$

2 joue (uniquement) A, B *ou* C. Impossible

	A	B	C
a	$3, 2$	$1, 1$	$0, 1.5$
b	$0, 0$	$2, 3$	$1, 2$

1 joue a $(p = 1)$ $\Rightarrow$ 2 n'est jamais indifférent $\Rightarrow$ seul équilibre possible (a, A)

1 joue b $(p = 0)$ $\Rightarrow$ 2 n'est jamais indifférent $\Rightarrow$ seul équilibre possible (b, B)

1 joue a *et* b *avec probabilités positives* $(0 < p < 1)$

$$\Rightarrow \quad A \xrightarrow{2} 2\,p$$

$$B \xrightarrow{2} 3 - 2\,p$$

$$C \xrightarrow{2} 2 - p/2.$$

2 joue (uniquement) A*,* B *ou* C. Impossible

2 joue (uniquement) A *et* B *avec probabilités positives*. Impossible

	A	B	C
a	$3, 2$	$1, 1$	$0, 1.5$
b	$0, 0$	$2, 3$	$1, 2$

1 joue a ($p = 1$) $\Rightarrow$ 2 n'est jamais indifférent $\Rightarrow$ seul équilibre possible (a, A)

1 joue b ($p = 0$) $\Rightarrow$ 2 n'est jamais indifférent $\Rightarrow$ seul équilibre possible (b, B)

1 joue a *et* b *avec probabilités positives* ($0 < p < 1$)

$$\Rightarrow \quad A \xrightarrow{2} 2\,p$$

$$B \xrightarrow{2} 3 - 2\,p$$

$$C \xrightarrow{2} 2 - p/2.$$

2 joue (uniquement) A, B *ou* C. Impossible

2 joue (uniquement) A *et* B *avec probabilités positives*. Impossible

2 joue (uniquement) B *et* C *avec probabilités positives* $\Rightarrow$ 1 dévie

	A	B	C
a	$3,2$	$1,1$	$0,1.5$
b	$0,0$	$2,3$	$1,2$

1 joue a $(p=1)$ $\Rightarrow$ 2 n'est jamais indifférent $\Rightarrow$ seul équilibre possible (a, A)

1 joue b $(p=0)$ $\Rightarrow$ 2 n'est jamais indifférent $\Rightarrow$ seul équilibre possible (b, B)

1 joue a *et* b *avec probabilités positives* $(0 < p < 1)$

$$\Rightarrow \quad A \xrightarrow{2} 2\,p$$
$$B \xrightarrow{2} 3 - 2\,p$$
$$C \xrightarrow{2} 2 - p/2.$$

2 joue (uniquement) A*,* B *ou* C. Impossible

2 joue (uniquement) A *et* B *avec probabilités positives*. Impossible

2 joue (uniquement) B *et* C *avec probabilités positives* $\Rightarrow$ 1 dévie

2 joue (uniquement) A *et* C *avec probabilités positives*. OK,
$(\sigma_1, \sigma_2) = ((4/5, 1/5),\ (1/4, 0, 3/4))$

Stratégie prudente / maximin

Stratégie prudente / maximin

Jeux finis à deux joueurs $\langle \{1,2\}, (S_1, S_2), (u_1, u_2) \rangle$ image

Stratégie prudente / maximin

Jeux finis à deux joueurs $\langle\{1,2\},(S_1,S_2),(u_1,u_2)\rangle$ image

Niveau d'utilité garanti par l'action $s_1 \in S_1$ du joueur $1 =$ utilité la plus faible que le joueur 1 peut avoir en jouant l'action s_1 :

$$\eta_1(s_1) = \min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} u_1(s_1, \sigma_2) = \min_{s_2 \in S_2} u_1(s_1, s_2)$$

Stratégie prudente / maximin

Jeux finis à deux joueurs $\langle \{1, 2\}, (S_1, S_2), (u_1, u_2) \rangle$ image

Niveau d'utilité garanti par l'action $s_1 \in S_1$ du joueur $1 =$ utilité la plus faible que le joueur 1 peut avoir en jouant l'action s_1 :

$$\eta_1(s_1) = \min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} u_1(s_1, \sigma_2) = \min_{s_2 \in S_2} u_1(s_1, s_2)$$

Exemple : jeu de la poule mouillée

Stratégie prudente / maximin

Jeux finis à deux joueurs $\langle \{1,2\}, (S_1, S_2), (u_1, u_2) \rangle$ image

Niveau d'utilité garanti par l'action $s_1 \in S_1$ du joueur 1 = utilité la plus faible que le joueur 1 peut avoir en jouant l'action s_1 :

$$\eta_1(s_1) = \min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} u_1(s_1, \sigma_2) = \min_{s_2 \in S_2} u_1(s_1, s_2)$$

Exemple : jeu de la poule mouillée

	a	b
a	$(2,2)$	$(\mathbf{1},3)$
b	$(3,\mathbf{1})$	$(\mathbf{0},\mathbf{0})$

$$\eta_1(a) = \eta_2(a) = 1$$

$$\eta_1(b) = \eta_2(b) = 0$$

Stratégie prudente / maximin

Jeux finis à deux joueurs $\langle \{1,2\}, (S_1, S_2), (u_1, u_2) \rangle$ image

Niveau d'utilité garanti par l'action $s_1 \in S_1$ du joueur 1 = utilité la plus faible que le joueur 1 peut avoir en jouant l'action s_1 :

$$\eta_1(s_1) = \min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} u_1(s_1, \sigma_2) = \min_{s_2 \in S_2} u_1(s_1, s_2)$$

Exemple : jeu de la poule mouillée

	a	b
a	$(2,2)$	$(\mathbf{1},3)$
b	$(3,\mathbf{1})$	$(\mathbf{0},\mathbf{0})$

$$\eta_1(a) = \eta_2(a) = 1$$
$$\eta_1(b) = \eta_2(b) = 0$$

Une action prudente ou maximin est une action qui maximise ce niveau d'utilité que le joueur peut se garantir

Définition. Une action $s_1^* \in S_1$ est une **action prudente** ou **maximin** du joueur 1 si

$$s_1^* \in \arg\max_{s_1 \in S_1} \eta_1(s_1) = \arg\max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} u_1(s_1, s_2)$$

Définition. Une action $s_1^* \in S_1$ est une **action prudente** ou **maximin** du joueur 1 si

$$s_1^* \in \arg\max_{s_1 \in S_1} \eta_1(s_1) = \arg\max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} u_1(s_1, s_2)$$

$\max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} u_1(s_1, s_2)$: meilleur niveau d'utilité garanti possible en stratégies pures pour le joueur 1

Définition. Une action $s_1^* \in S_1$ est une **action prudente** ou **maximin** du joueur 1 si

$$s_1^* \in \arg\max_{s_1 \in S_1} \eta_1(s_1) = \arg\max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} u_1(s_1, s_2)$$

$\max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} u_1(s_1, s_2)$: meilleur niveau d'utilité garanti possible en stratégies pures pour le joueur 1

Exemple : dans jeu de la poule mouillée

	a	b
a	$(2, 2)$	$(\mathbf{1}, 3)$
b	$(3, \mathbf{1})$	$(\mathbf{0}, \mathbf{0})$

Définition. Une action $s_1^* \in S_1$ est une **action prudente** ou **maximin** du joueur 1 si

$$s_1^* \in \arg\max_{s_1 \in S_1} \eta_1(s_1) = \arg\max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} u_1(s_1, s_2)$$

$\max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} u_1(s_1, s_2)$: meilleur niveau d'utilité garanti possible en stratégies pures pour le joueur 1

Exemple : dans jeu de la poule mouillée

	a	b
a	$(2, 2)$	$(\mathbf{1}, 3)$
b	$(3, \mathbf{1})$	$(\mathbf{0}, \mathbf{0})$

– stratégie prudente de chaque joueur : a

Définition. Une action $s_1^* \in S_1$ est une **action prudente** ou **maximin** du joueur 1 si

$$s_1^* \in \arg\max_{s_1 \in S_1} \eta_1(s_1) = \arg\max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} u_1(s_1, s_2)$$

$\max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} u_1(s_1, s_2)$: meilleur niveau d'utilité garanti possible en stratégies pures pour le joueur 1

Exemple : dans jeu de la poule mouillée

	a	b
a	$(2, 2)$	$(\mathbf{1}, 3)$
b	$(3, \mathbf{1})$	$(\mathbf{0}, \mathbf{0})$

- stratégie prudente de chaque joueur : a
- meilleur niveau d'utilité garanti : 1

Définition. Une action $s_1^* \in S_1$ est une **action prudente** ou **maximin** du joueur 1 si

$$s_1^* \in \arg\max_{s_1 \in S_1} \eta_1(s_1) = \arg\max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} u_1(s_1, s_2)$$

$\max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} u_1(s_1, s_2)$: meilleur niveau d'utilité garanti possible en stratégies pures pour le joueur 1

Exemple : dans jeu de la poule mouillée

	a	b
a	$(2,2)$	$(\mathbf{1},3)$
b	$(3,\mathbf{1})$	$(\mathbf{0},\mathbf{0})$

– stratégie prudente de chaque joueur : a

– meilleur niveau d'utilité garanti : 1

☞ Un profil de stratégies prudentes n'est pas nécessairement un équilibre de Nash

Définition. Une stratégie mixte $\sigma_1^* \in \Sigma_1$ est une **stratégie (mixte) prudente** ou **maximin** du joueur 1 si

$$\sigma_1^* \in \arg \max_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} \eta_1(\sigma_1) = \arg \max_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} \min_{s_2 \in S_2} u_1(\sigma_1, s_2)$$

Définition. Une stratégie mixte $\sigma_1^* \in \Sigma_1$ est une **stratégie (mixte) prudente** ou **maximin** du joueur 1 si

$$\sigma_1^* \in \arg\max_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} \eta_1(\sigma_1) = \arg\max_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} \min_{s_2 \in S_2} u_1(\sigma_1, s_2)$$

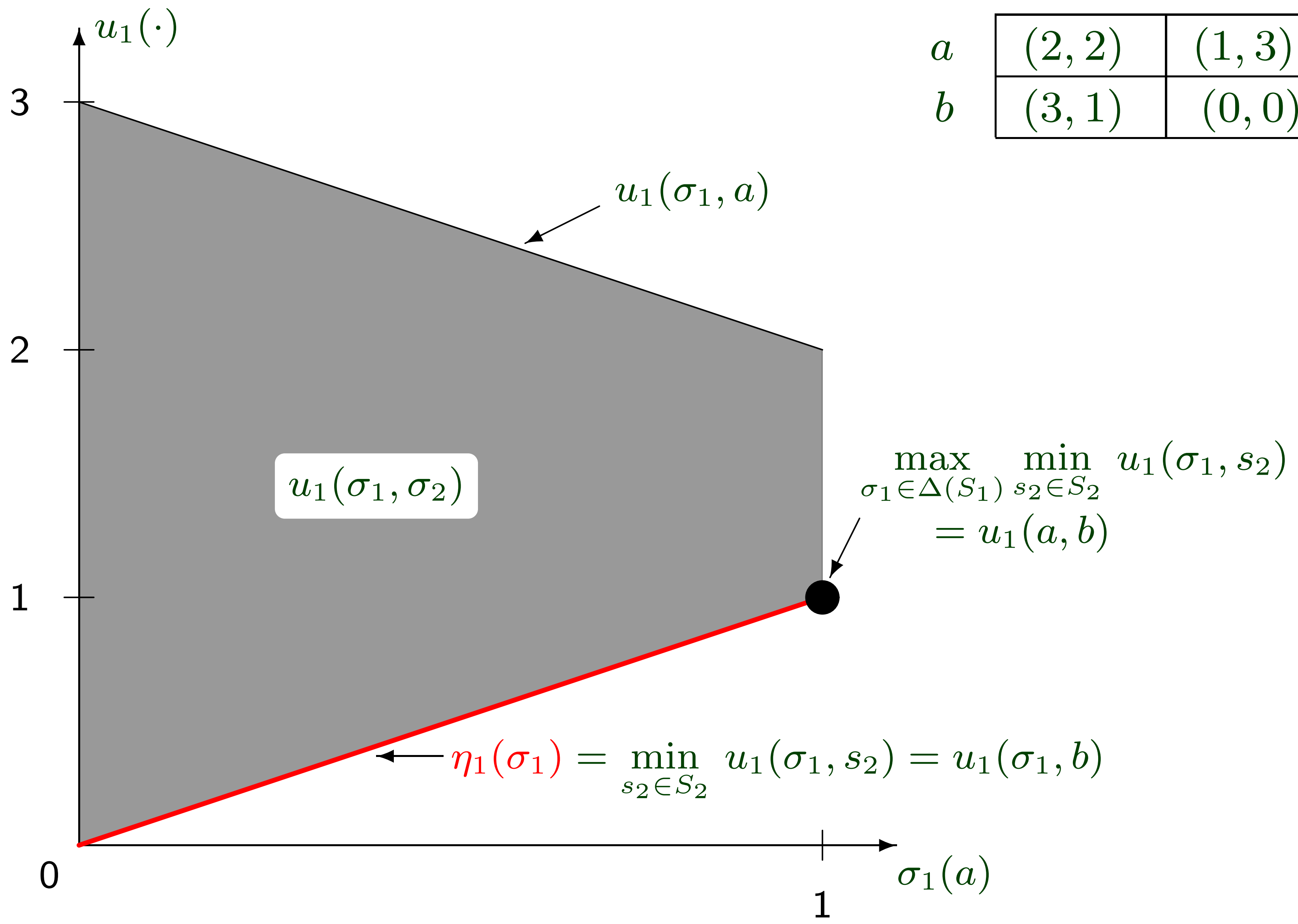
$\max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \min_{s_2 \in S_2} u_1(\sigma_1, s_2)$: meilleur niveau d'utilité garanti possible en stratégies mixtes pour le joueur 1

Exemple de la poule mouillée : stratégie mixte prudente = action prudente

	a	b
a	$(2, 2)$	$(1, 3)$
b	$(3, 1)$	$(0, 0)$

Exemple de la poule mouillée : stratégie mixte prudente = action prudente

	a	b
a	$(2,2)$	$(1,3)$
b	$(3,1)$	$(0,0)$



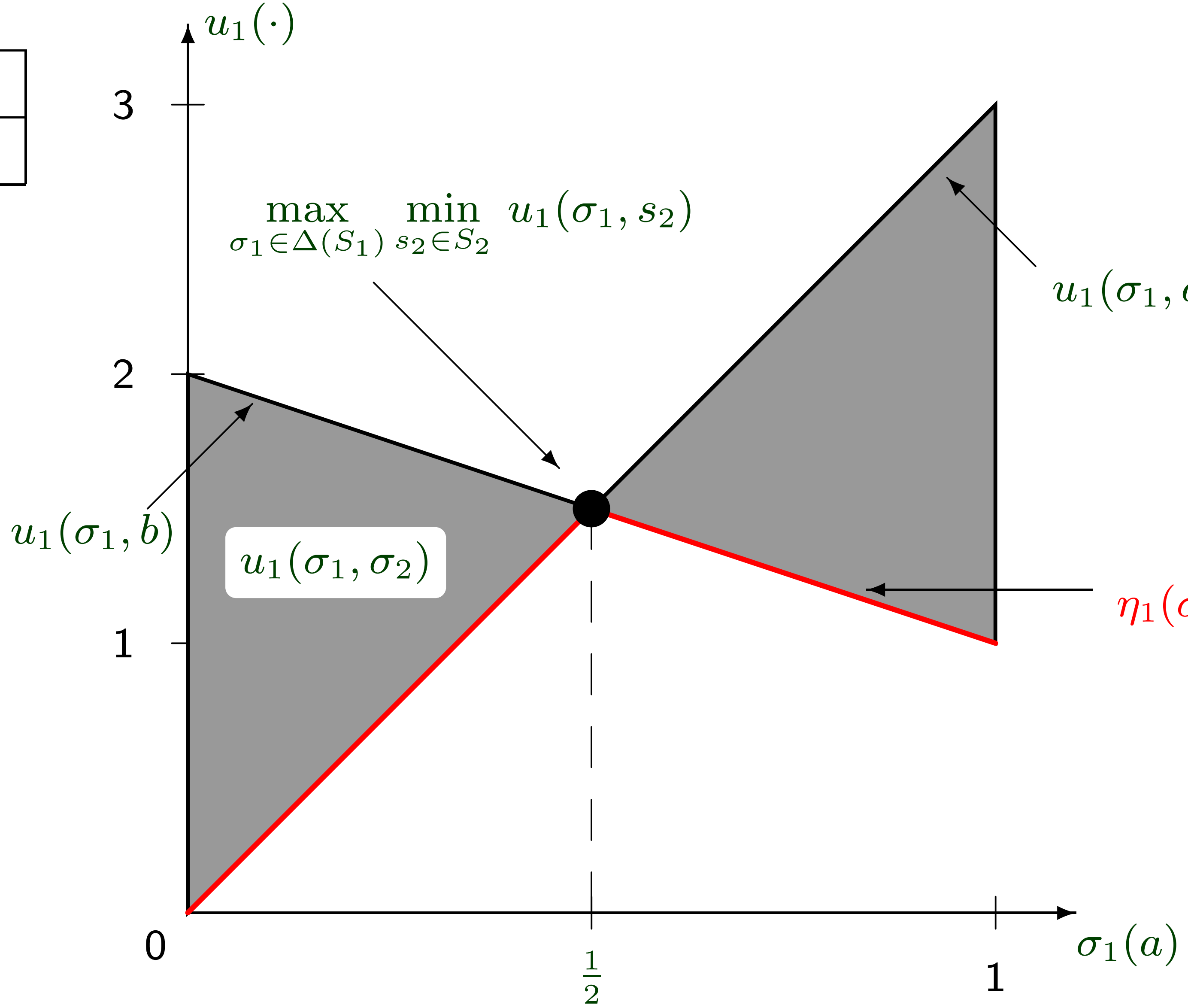
Une stratégie prudente peut cependant être non dégénérée. Bataille des sexes

Une stratégie prudente peut cependant être non dégénérée. Bataille des sexes

	a	b
a	$(3,2)$	$(1,1)$
b	$(0,0)$	$(2,3)$

Une stratégie prudente peut cependant être non dégénérée. Bataille des sexes

	a	b
a	$(3,2)$	$(1,1)$
b	$(0,0)$	$(2,3)$



$$\max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} u_1(s_1, s_2) = 1 < \max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \min_{s_2 \in S_2} u_1(\sigma_1, s_2) = 1.5$$

Jeux à somme nulle

Jeux à somme nulle

Définition. Un jeu sous forme normale à deux joueurs $\langle \{1, 2\}, (S_1, S_2), (u_1, u_2)\rangle$ est un **jeu à somme nulle** ou un **jeu strictement compétitif** si les joueurs ont des préférences diamétralement opposées : $u_1 = u$ et $u_2 = -u$

Jeux à somme nulle

Définition. Un jeu sous forme normale à deux joueurs $\langle\{1,2\},(S_1,S_2),(u_1,u_2)\rangle$ est un **jeu à somme nulle** ou un **jeu strictement compétitif** si les joueurs ont des préférences diamétralement opposées : $u_1 = u$ et $u_2 = -u$

Remarque. Dans un jeu à somme nulle tout résultat est évidemment Pareto optimal

Jeux à somme nulle

Définition. Un jeu sous forme normale à deux joueurs $\langle\{1,2\},(S_1,S_2),(u_1,u_2)\rangle$ est un **jeu à somme nulle** ou un **jeu strictement compétitif** si les joueurs ont des préférences diamétralement opposées : $u_1 = u$ et $u_2 = -u$

Remarque. Dans un jeu à somme nulle tout résultat est évidemment Pareto optimal

Exemples : Cache bouton, feuille-pierre-ciseaux, jeu d'échec

Théorème. *Considérons un jeu fini et à somme nulle. Un profil de stratégies* (σ_1^*, σ_2^*) *est un équilibre de Nash si et seulement si* (σ_1^*, σ_2^*) *est un profil de stratégies prudentes. De plus, on a*

$$u_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) = \max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} u_1(\sigma_1, \sigma_2) = \min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} \max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} u_1(\sigma_1, \sigma_2) \tag{1}$$

et donc tous les équilibres de Nash donnent la même utilité au joueur 1 (son meilleur niveau garanti possible, ou **valeur** *du jeu), et au joueur 2*

Théorème. *Considérons un jeu fini et à somme nulle. Un profil de stratégies* (σ_1^*, σ_2^*) *est un équilibre de Nash si et seulement si* (σ_1^*, σ_2^*) *est un profil de stratégies prudentes. De plus, on a*

$$u_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) = \max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} u_1(\sigma_1, \sigma_2) = \min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} \max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} u_1(\sigma_1, \sigma_2) \tag{1}$$

et donc tous les équilibres de Nash donnent la même utilité au joueur 1 (son meilleur niveau garanti possible, ou **valeur** *du jeu), et au joueur 2*

Remarques.

Théorème. *Considérons un jeu fini et à somme nulle. Un profil de stratégies* (σ_1^*, σ_2^*) *est un équilibre de Nash si et seulement si* (σ_1^*, σ_2^*) *est un profil de stratégies prudentes. De plus, on a*

$$u_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) = \max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} u_1(\sigma_1, \sigma_2) = \min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} \max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} u_1(\sigma_1, \sigma_2) \qquad (1)$$

et donc tous les équilibres de Nash donnent la même utilité au joueur 1 (son meilleur niveau garanti possible, ou **valeur** *du jeu), et au joueur 2*

Remarques.

➢ Égalité (1) $\sim$ Théorème du maximin (von Neumann, 1928)

Théorème. *Considérons un jeu fini et à somme nulle. Un profil de stratégies* (σ_1^*, σ_2^*) *est un équilibre de Nash si et seulement si* (σ_1^*, σ_2^*) *est un profil de stratégies prudentes. De plus, on a*

$$u_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) = \max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} u_1(\sigma_1, \sigma_2) = \min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} \max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} u_1(\sigma_1, \sigma_2) \qquad (1)$$

et donc tous les équilibres de Nash donnent la même utilité au joueur 1 (son meilleur niveau garanti possible, ou **valeur** *du jeu), et au joueur 2*

Remarques.

- Égalité (1) $\sim$ Théorème du maximin (von Neumann, 1928)
- Égalité (1) pas vérifiée en stratégies pures (sauf si EN en stratégies pures). Ex : cache bouton
  $\max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} u_1(s_1, s_2) = -1 < \min_{s_2 \in S_2} \max_{s_1 \in S_1} u_1(s_1, s_2) = 1$

Théorème. *Considérons un jeu fini et à somme nulle. Un profil de stratégies* (σ_1^*, σ_2^*) *est un équilibre de Nash si et seulement si* (σ_1^*, σ_2^*) *est un profil de stratégies prudentes. De plus, on a*

$$u_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) = \max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} u_1(\sigma_1, \sigma_2) = \min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} \max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} u_1(\sigma_1, \sigma_2) \tag{1}$$

et donc tous les équilibres de Nash donnent la même utilité au joueur 1 (son meilleur niveau garanti possible, ou **valeur** *du jeu), et au joueur 2*

Remarques.

- Égalité (1) $\sim$ Théorème du maximin (von Neumann, 1928)
- Égalité (1) pas vérifiée en stratégies pures (sauf si EN en stratégies pures). Ex : cache bouton
  $\max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} u_1(s_1, s_2) = -1 < \min_{s_2 \in S_2} \max_{s_1 \in S_1} u_1(s_1, s_2) = 1$
- Le paiement d'équilibre peut être garanti par chaque joueur indépendamment du comportement de l'autre joueur $\Rightarrow$ stratégie optimale

Théorème. *Considérons un jeu fini et à somme nulle. Un profil de stratégies* (σ_1^*, σ_2^*) *est un équilibre de Nash si et seulement si* (σ_1^*, σ_2^*) *est un profil de stratégies prudentes. De plus, on a*

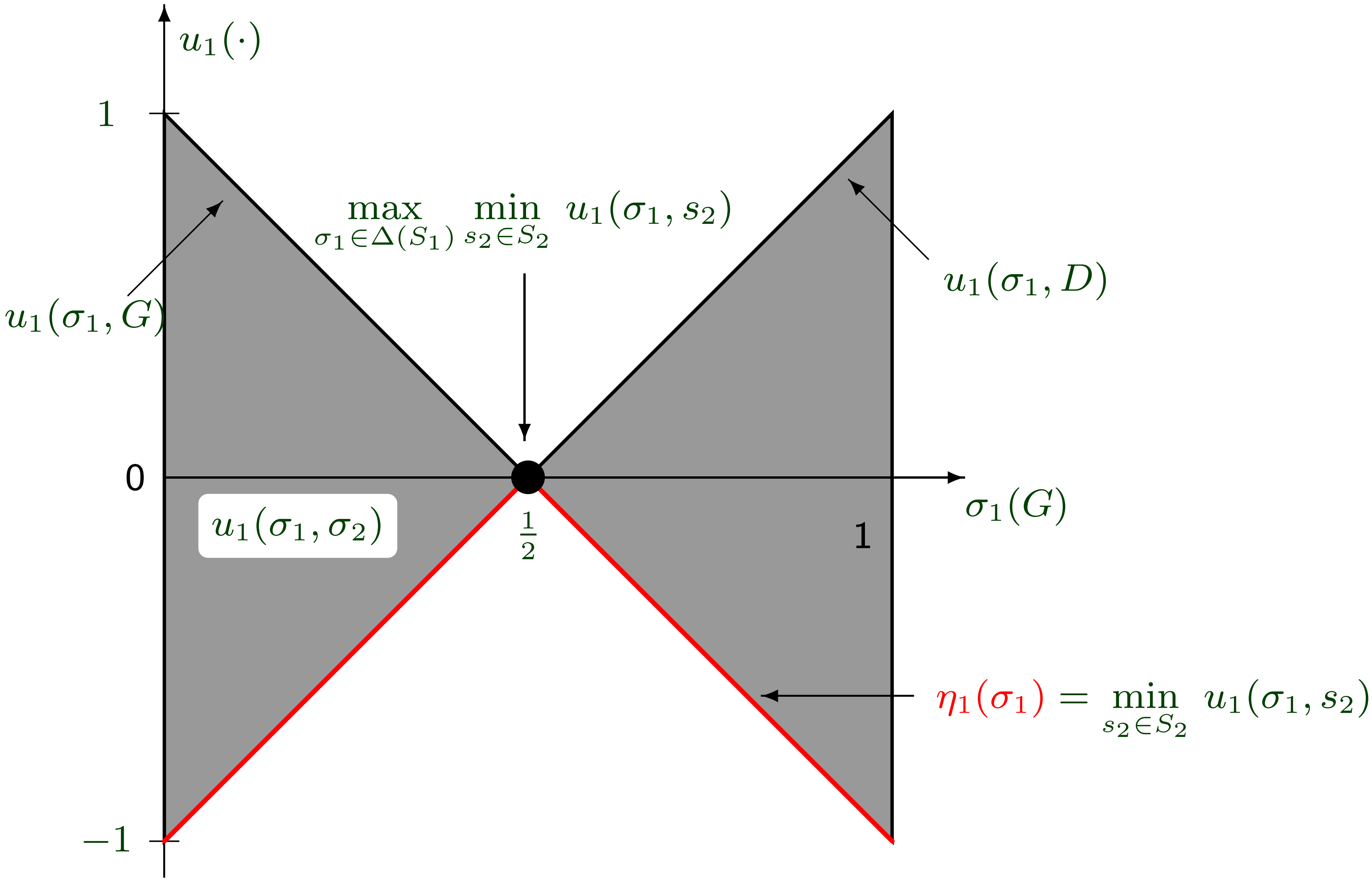
$$u_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) = \max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} u_1(\sigma_1, \sigma_2) = \min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} \max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} u_1(\sigma_1, \sigma_2) \tag{1}$$

et donc tous les équilibres de Nash donnent la même utilité au joueur 1 (son meilleur niveau garanti possible, ou **valeur** *du jeu), et au joueur 2*

Remarques.

- Égalité (1) $\sim$ Théorème du maximin (von Neumann, 1928)
- Égalité (1) pas vérifiée en stratégies pures (sauf si EN en stratégies pures). Ex : cache bouton
  $\max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} u_1(s_1, s_2) = -1 < \min_{s_2 \in S_2} \max_{s_1 \in S_1} u_1(s_1, s_2) = 1$
- Le paiement d'équilibre peut être garanti par chaque joueur indépendamment du comportement de l'autre joueur $\Rightarrow$ stratégie optimale
- Stratégies d'équilibre interchangeables

Exemple. Illustration du résultat du théorème dans le jeu cache bouton : la stratégie maximin du joueur 1 est bien équivalente à sa stratégie d'équilibre $\sigma_1^*(G) = 1/2$



Proposition.

Soit G un jeu sous forme normale fini à somme nulle et G' le jeu obtenu à partir de G en supprimant une action du joueur i

Proposition.

Soit G un jeu sous forme normale fini à somme nulle et G' le jeu obtenu à partir de G en supprimant une action du joueur i

Alors l'utilité d'équilibre du joueur i dans G' est inférieure ou égale à l'utilité d'équilibre du joueur i dans le jeu G

Proposition.

Soit G un jeu sous forme normale fini à somme nulle et G' le jeu obtenu à partir de G en supprimant une action du joueur i

Alors l'utilité d'équilibre du joueur i dans G' est inférieure ou égale à l'utilité d'équilibre du joueur i dans le jeu G

Ceci n'est pas nécessairement vrai dans les jeux à somme non nulle, même lorsque l'équilibre est unique

Proposition.

Soit G un jeu sous forme normale fini à somme nulle et G' le jeu obtenu à partir de G en supprimant une action du joueur i

Alors l'utilité d'équilibre du joueur i dans G' est inférieure ou égale à l'utilité d'équilibre du joueur i dans le jeu G

Ceci n'est pas nécessairement vrai dans les jeux à somme non nulle, même lorsque l'équilibre est unique

Preuve. Directement du fait que dans les jeux à somme nulle

$u_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) = \max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} u_1(\sigma_1, \sigma_2)$ d'après le théorème et du fait que si $Y \subseteq X$ alors $\max_{x \in X} f(x) \geq \max_{x \in Y} f(x)$

Pour montrer que le résultat n'est plus vrai dans les jeux à somme non nulle, même lorsque l'équilibre est unique, il suffit de considérer le jeu suivant :

	a	b
a	$(10, 0)$	$(1, 1)$
b	$(5, 5)$	$(0, 0)$

Pour montrer que le résultat n'est plus vrai dans les jeux à somme non nulle, même lorsque l'équilibre est unique, il suffit de considérer le jeu suivant :

	a	b
a	$(10, 0)$	$(1, 1)$
b	$(5, 5)$	$(0, 0)$

L'unique EN est (a, b). Si on supprime la stratégie a du joueur 1 alors l'unique équilibre devient (b, a) qui apporte une utilité strictement supérieure au joueur 1 (et 2)

Pour montrer que le résultat n'est plus vrai dans les jeux à somme non nulle, même lorsque l'équilibre est unique, il suffit de considérer le jeu suivant :

	a	b
a	$(10, 0)$	$(1, 1)$
b	$(5, 5)$	$(0, 0)$

L'unique EN est (a, b). Si on supprime la stratégie a du joueur 1 alors l'unique équilibre devient (b, a) qui apporte une utilité strictement supérieure au joueur 1 (et 2)

✍ Pourquoi dans un jeu symétrique fini et à somme nulle le paiement des deux joueurs est nul à tous les équilibres de Nash ?

Élimination itérative des stratégies dominées

Élimination itérative des stratégies dominées

– **Équilibre de Nash**

Élimination itérative des stratégies dominées

– **Équilibre de Nash** : anticipations et coordination (souvent trop) parfaites

Élimination itérative des stratégies dominées

- **Équilibre de Nash** : anticipations et coordination (souvent trop) parfaites

- **Stratégie prudente**

Élimination itérative des stratégies dominées

- **Équilibre de Nash** : anticipations et coordination (souvent trop) parfaites

- **Stratégie prudente** : anticipations (souvent trop) pessimistes, naïves (sauf dans les jeux à somme nulle)

Élimination itérative des stratégies dominées

- **Équilibre de Nash** : anticipations et coordination (souvent trop) parfaites

- **Stratégie prudente** : anticipations (souvent trop) pessimistes, naïves (sauf dans les jeux à somme nulle)

- **Élimination itérative des stratégies dominées**

Élimination itérative des stratégies dominées

- **Équilibre de Nash** : anticipations et coordination (souvent trop) parfaites

- **Stratégie prudente** : anticipations (souvent trop) pessimistes, naïves (sauf dans les jeux à somme nulle)

- **Élimination itérative des stratégies dominées** : ne repose ni sur l'hypothèse d'anticipations parfaites ni sur l'hypothèse d'anticipations pessimistes

Élimination itérative des stratégies dominées

- **Équilibre de Nash** : anticipations et coordination (souvent trop) parfaites

- **Stratégie prudente** : anticipations (souvent trop) pessimistes, naïves (sauf dans les jeux à somme nulle)

- **Élimination itérative des stratégies dominées** : ne repose ni sur l'hypothèse d'anticipations parfaites ni sur l'hypothèse d'anticipations pessimistes
  - mais sur l'idée que chaque joueur se comporte de manière rationnelle

Élimination itérative des stratégies dominées

- **Équilibre de Nash** : anticipations et coordination (souvent trop) parfaites
- **Stratégie prudente** : anticipations (souvent trop) pessimistes, naïves (sauf dans les jeux à somme nulle)
- **Élimination itérative des stratégies dominées** : ne repose ni sur l'hypothèse d'anticipations parfaites ni sur l'hypothèse d'anticipations pessimistes
  - mais sur l'idée que chaque joueur se comporte de manière rationnelle
  - chacun pense que les autres se comportent de manière rationnelle

Élimination itérative des stratégies dominées

- **Équilibre de Nash** : anticipations et coordination (souvent trop) parfaites
- **Stratégie prudente** : anticipations (souvent trop) pessimistes, naïves (sauf dans les jeux à somme nulle)
- **Élimination itérative des stratégies dominées** : ne repose ni sur l'hypothèse d'anticipations parfaites ni sur l'hypothèse d'anticipations pessimistes
  - mais sur l'idée que chaque joueur se comporte de manière rationnelle
  - chacun pense que les autres se comportent de manière rationnelle
  - chacun pense que chacun pense que chacun est rationnel

Élimination itérative des stratégies dominées

- **Équilibre de Nash** : anticipations et coordination (souvent trop) parfaites

- **Stratégie prudente** : anticipations (souvent trop) pessimistes, naïves (sauf dans les jeux à somme nulle)

- **Élimination itérative des stratégies dominées** : ne repose ni sur l'hypothèse d'anticipations parfaites ni sur l'hypothèse d'anticipations pessimistes
  - mais sur l'idée que chaque joueur se comporte de manière rationnelle
  - chacun pense que les autres se comportent de manière rationnelle
  - chacun pense que chacun pense que chacun est rationnel

  ... etc ...

Définition. Une stratégie pure $s_i \in S_i$ est **strictement dominée** s'il existe une stratégie mixte $\sigma_i \in \Sigma_i$ telle que $u_i(\sigma_i, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i})$ pour tout $s_{-i} \in S_{-i}$

Définition. Une stratégie pure $s_i \in S_i$ est **strictement dominée** s'il existe une stratégie mixte $\sigma_i \in \Sigma_i$ telle que $u_i(\sigma_i, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i})$ pour tout $s_{-i} \in S_{-i}$

Une stratégie pure $s_i \in S_i$ est **faiblement dominée** s'il existe une stratégie mixte $\sigma_i \in \Sigma_i$ telle que $u_i(\sigma_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i})$ pour tout $s_{-i} \in S_{-i}$, avec une inégalité stricte pour au moins un profil de stratégies pures s_{-i} des autres joueurs

Une stratégie peut être strictement dominée par une stratégie mixte sans être strictement dominée par une stratégie pure

Une stratégie peut être strictement dominée par une stratégie mixte sans être strictement dominée par une stratégie pure

Exemple.

	G	D
H	$(3, 0)$	$(0, 1)$
M	$(0, 0)$	$(3, 1)$
B	$(1, 1)$	$(1, 0)$

Une stratégie peut être strictement dominée par une stratégie mixte sans être strictement dominée par une stratégie pure

Exemple.

	G	D
H	$(3,0)$	$(0,1)$
M	$(0,0)$	$(3,1)$
B	$(1,1)$	$(1,0)$

La stratégie pure B rapporte toujours 1 quelle que soit la stratégie du joueur 2 alors que la stratégie mixte qui consiste à jouer H et M avec la même probabilité rapporte toujours une utilité espérée égale à 1.5 quelle que soit la stratégie du joueur 2. La stratégie pure B est donc strictement dominée, mais elle n'est pas strictement dominée par les stratégies pures H et M

Une stratégie peut être strictement dominée par une stratégie mixte sans être strictement dominée par une stratégie pure

Exemple.

	G	D
H	$(3,0)$	$(0,1)$
M	$(0,0)$	$(3,1)$
B	$(1,1)$	$(1,0)$

La stratégie pure B rapporte toujours 1 quelle que soit la stratégie du joueur 2 alors que la stratégie mixte qui consiste à jouer H et M avec la même probabilité rapporte toujours une utilité espérée égale à 1.5 quelle que soit la stratégie du joueur 2. La stratégie pure B est donc strictement dominée, mais elle n'est pas strictement dominée par les stratégies pures H et M

Remarque. Si une stratégie pure s_i est strictement (faiblement) dominée alors toutes les stratégies mixtes qui mettent une probabilité strictement positive sur s_i sont strictement (faiblement) dominées

Un joueur ne joue pas de stratégie strictement dominée si et seulement si il maximise son utilité par rapport à ses croyances sur les stratégies (éventuellement corrélées) des autres joueurs

Un joueur ne joue pas de stratégie strictement dominée si et seulement si il maximise son utilité par rapport à ses croyances sur les stratégies (éventuellement corrélées) des autres joueurs

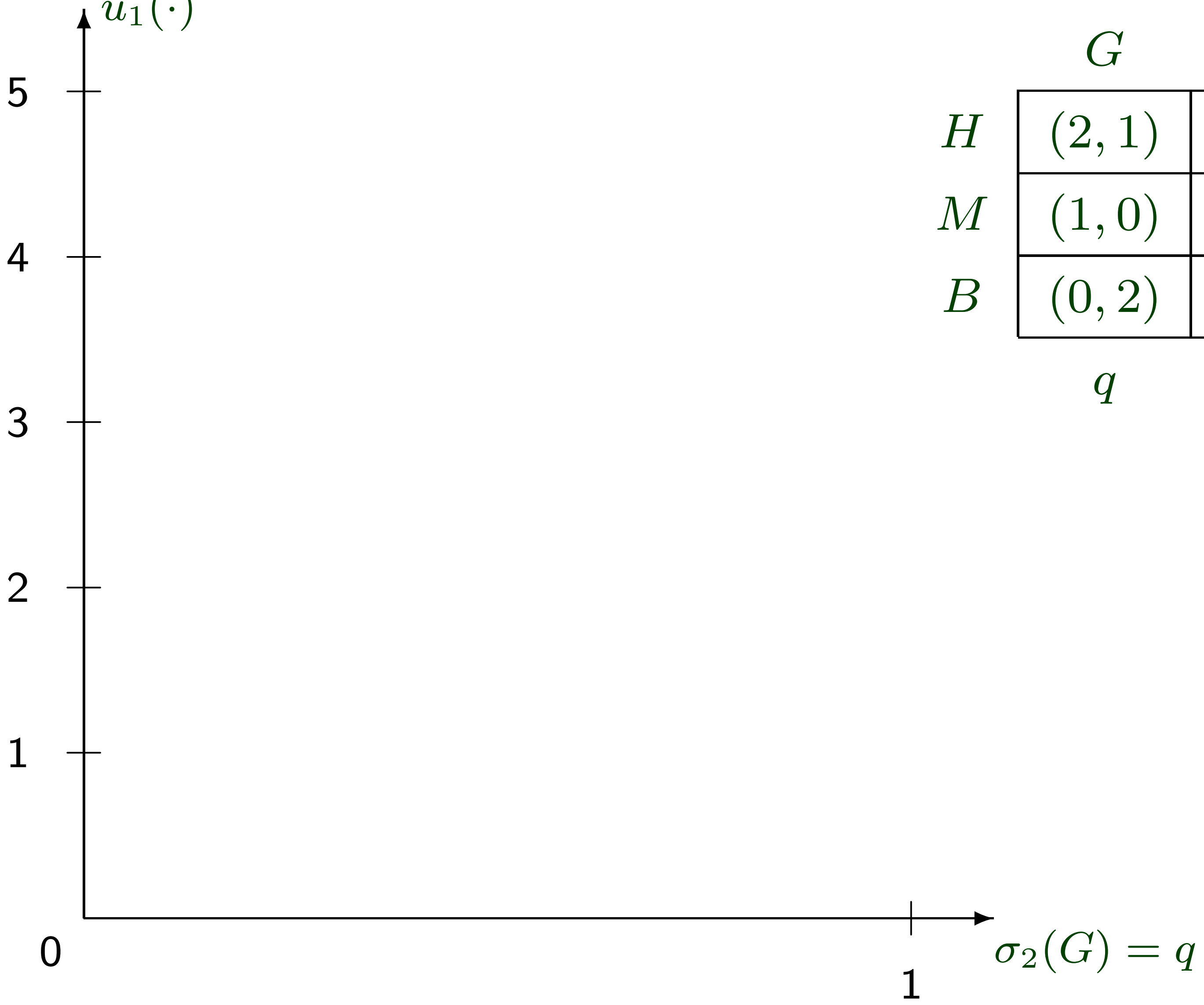
Proposition. *Une stratégie* s_i *du joueur* i *est strictement dominée si et seulement si* s_i *n'est jamais une meilleure réponse, c'est-à-dire que* $s_i \notin \mathrm{MR}_i(\mu_{-i})$ *pour toute croyance* $\mu_{-i} \in \Delta(S_{-i})$ *du joueur* i *sur le comportement des autres joueurs*

Un joueur ne joue pas de stratégie strictement dominée si et seulement si il maximise son utilité par rapport à ses croyances sur les stratégies (éventuellement corrélées) des autres joueurs

Proposition. *Une stratégie* s_i *du joueur* i *est strictement dominée si et seulement si* s_i *n'est jamais une meilleure réponse, c'est-à-dire que* $s_i \notin \mathrm{MR}_i(\mu_{-i})$ *pour toute croyance* $\mu_{-i} \in \Delta(S_{-i})$ *du joueur* i *sur le comportement des autres joueurs*

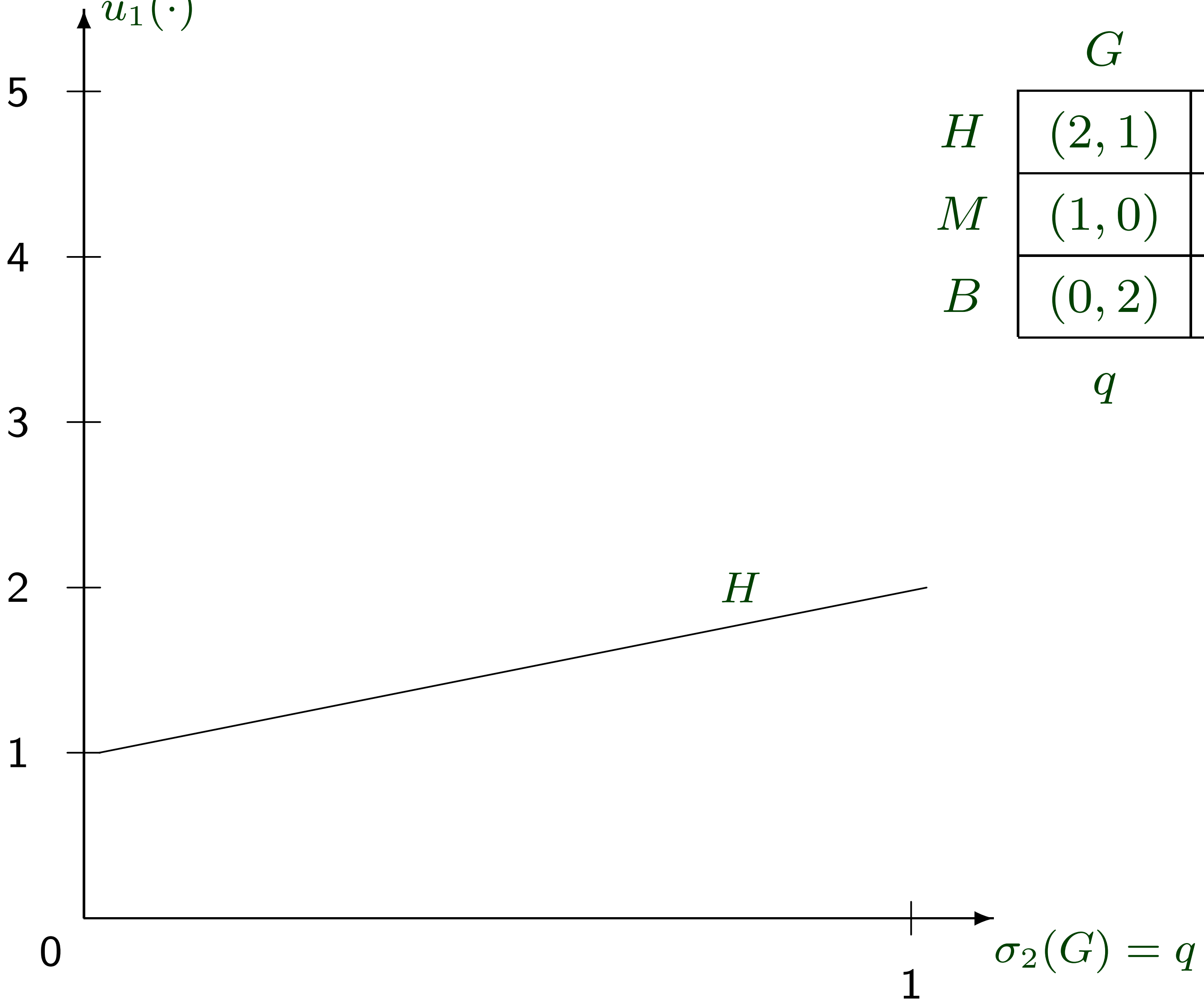
Exemple.

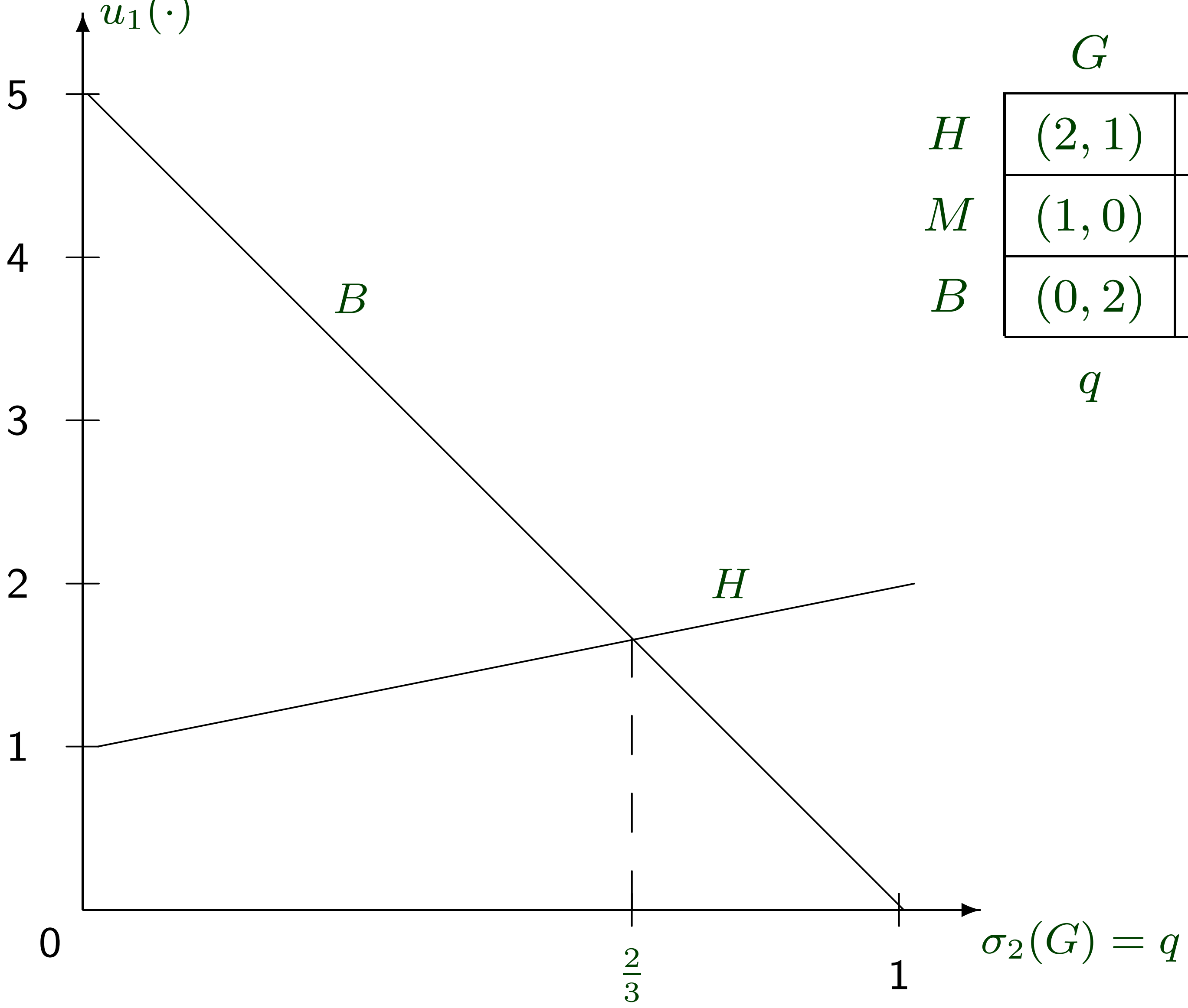
	G	D
H	$(2,1)$	$(1,2)$
M	$(1,0)$	$(2,5)$
B	$(0,2)$	$(5,1)$
	q	$1-q$



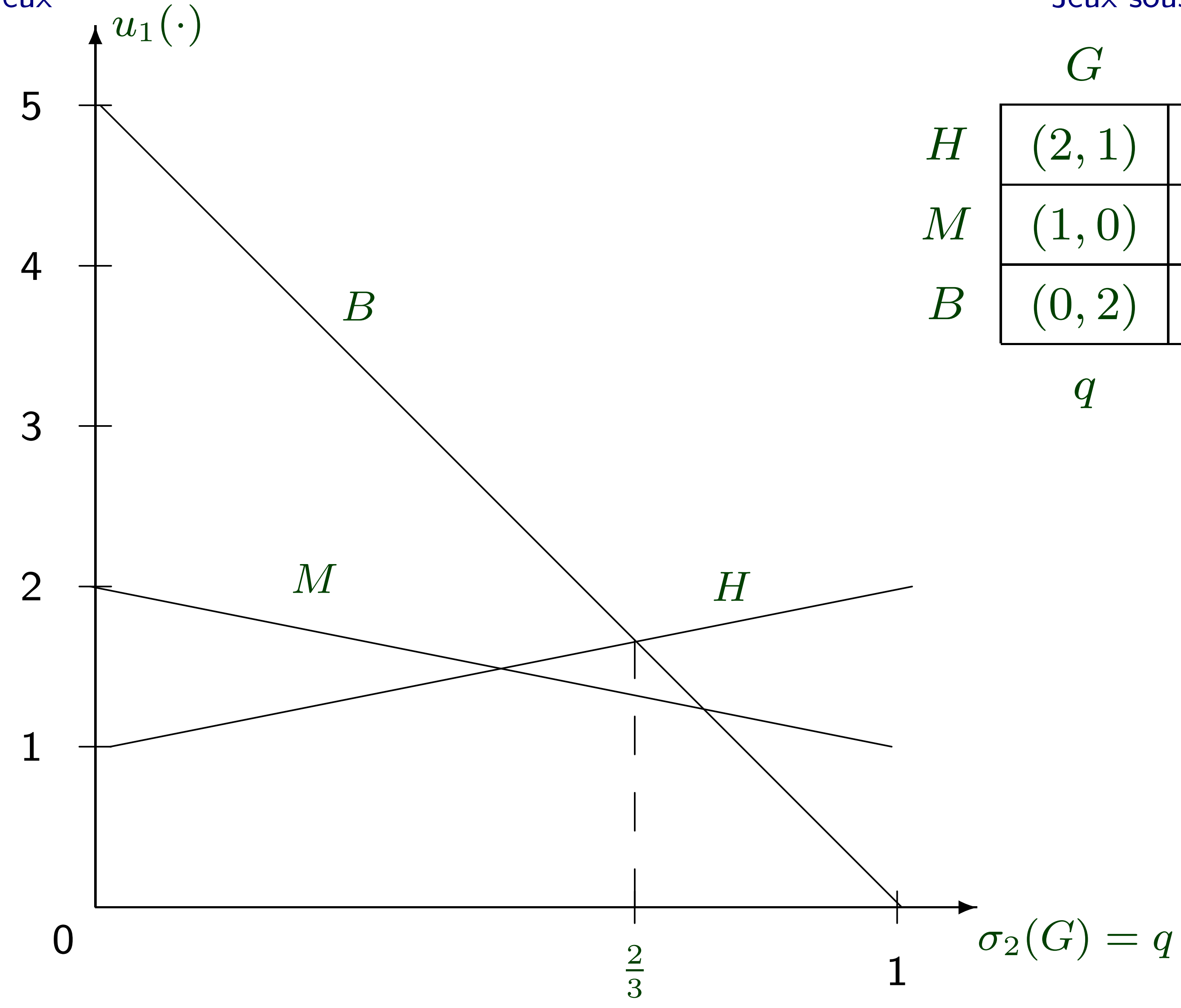
	G	D
H	$(2,1)$	$(1,2)$
M	$(1,0)$	$(2,5)$
B	$(0,2)$	$(5,1)$
	q	$1-q$

	G	D
H	$(2, 1)$	$(1, 2)$
M	$(1, 0)$	$(2, 5)$
B	$(0, 2)$	$(5, 1)$
	q	$1 - q$

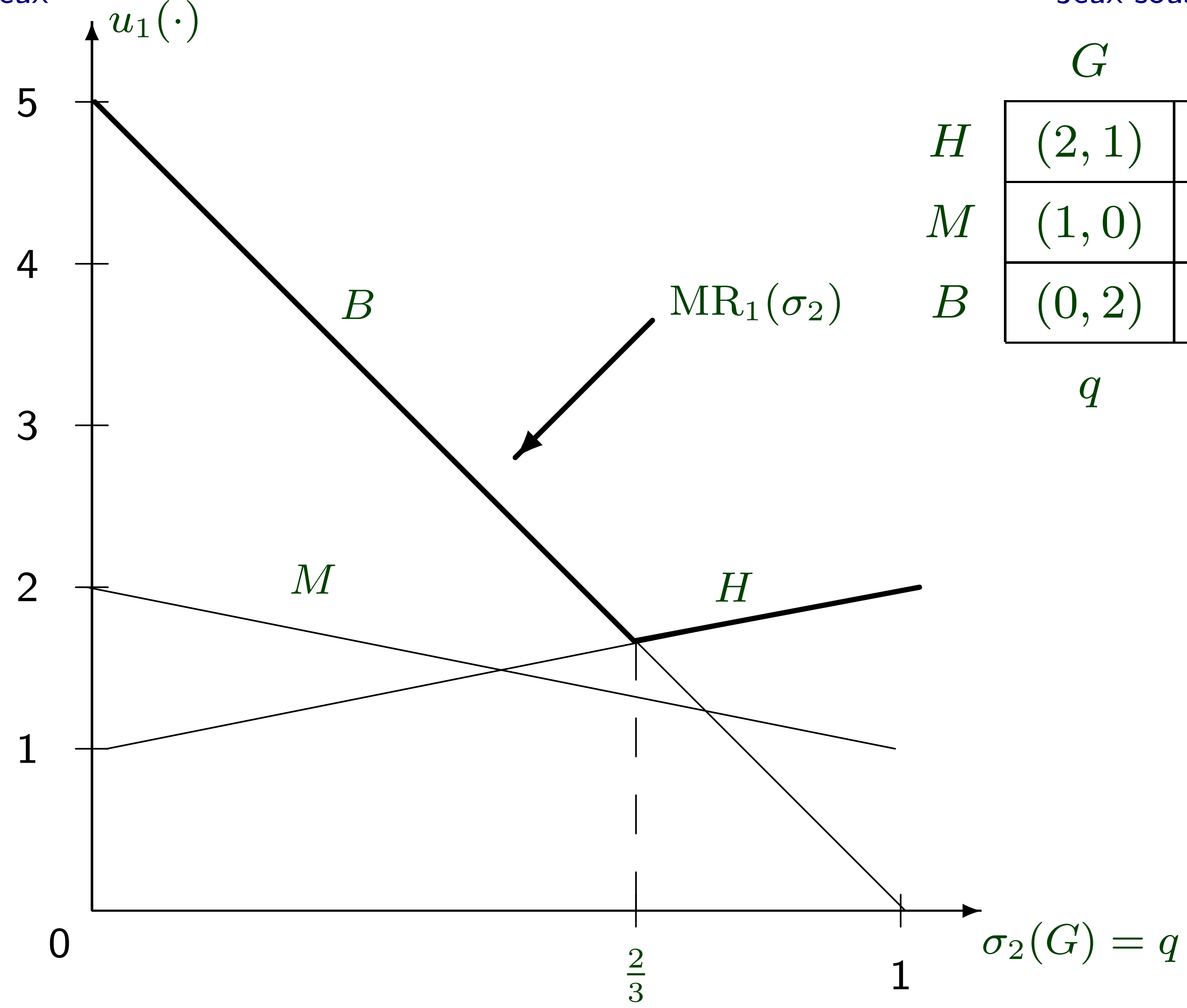




	G	D
H	$(2,1)$	$(1,2)$
M	$(1,0)$	$(2,5)$
B	$(0,2)$	$(5,1)$
	q	$1-q$



	G	D
H	$(2,1)$	$(1,2)$
M	$(1,0)$	$(2,5)$
B	$(0,2)$	$(5,1)$
	q	$1-q$



	G	D
H	$(2,1)$	$(1,2)$
M	$(1,0)$	$(2,5)$
B	$(0,2)$	$(5,1)$
	q	$1-q$

M n'est jamais une meilleure réponse donc elle est strictement dominée (e.g., par $(5/8, 0, 3/8)$)

Définition. Un ensemble de profils de stratégies $S^* \subseteq S$ **résiste à l'élimination itérative des stratégies strictement** (**faiblement**) **dominées** s'il existe une suite d'éliminations représentée par une suite de profils de stratégies $(S^k)_{k=1}^K$, où $S^k = (S_i^k)_{i \in N}$ pour tout k, telle que

Définition. Un ensemble de profils de stratégies $S^* \subseteq S$ **résiste à l'élimination itérative des stratégies strictement** (**faiblement**) **dominées** s'il existe une suite d'éliminations représentée par une suite de profils de stratégies $(S^k)_{k=1}^K$, où $S^k = (S_i^k)_{i \in N}$ pour tout k, telle que

- $S^0 = S$ et $S^K = S^*$

Définition. Un ensemble de profils de stratégies $S^* \subseteq S$ **résiste à l'élimination itérative des stratégies strictement** (**faiblement**) **dominées** s'il existe une suite d'éliminations représentée par une suite de profils de stratégies $(S^k)_{k=1}^K$, où $S^k = (S_i^k)_{i \in N}$ pour tout k, telle que

- $S^0 = S$ et $S^K = S^*$
- $S^{k+1} \subseteq S^k$ pour tout k

Définition. Un ensemble de profils de stratégies $S^* \subseteq S$ **résiste à l'élimination itérative des stratégies strictement** (**faiblement**) **dominées** s'il existe une suite d'éliminations représentée par une suite de profils de stratégies $(S^k)_{k=1}^K$, où $S^k = (S_i^k)_{i \in N}$ pour tout k, telle que

- $S^0 = S$ et $S^K = S^*$
- $S^{k+1} \subseteq S^k$ pour tout k
- si $s_i \in S_i^k$ mais $s_i \notin S_i^{k+1}$ alors s_i est strictement (faiblement) dominée dans le jeu réduit $G^k = \langle N, (S_i^k)_i, (u_i)_i \rangle$

Définition. Un ensemble de profils de stratégies $S^* \subseteq S$ **résiste à l'élimination itérative des stratégies strictement** (**faiblement**) **dominées** s'il existe une suite d'éliminations représentée par une suite de profils de stratégies $(S^k)_{k=1}^K$, où $S^k = (S_i^k)_{i \in N}$ pour tout k, telle que

- $S^0 = S$ et $S^K = S^*$
- $S^{k+1} \subseteq S^k$ pour tout k
- si $s_i \in S_i^k$ mais $s_i \notin S_i^{k+1}$ alors s_i est strictement (faiblement) dominée dans le jeu réduit $G^k = \langle N, (S_i^k)_i, (u_i)_i \rangle$
- aucune action n'est strictement (faiblement) dominée dans le jeu réduit $G^K = \langle N, (S_i^K)_i, (u_i)_i \rangle$

Définition. Un ensemble de profils de stratégies $S^* \subseteq S$ **résiste à l'élimination itérative des stratégies strictement** (**faiblement**) **dominées** s'il existe une suite d'éliminations représentée par une suite de profils de stratégies $(S^k)_{k=1}^K$, où $S^k = (S_i^k)_{i \in N}$ pour tout k, telle que

- $S^0 = S$ et $S^K = S^*$
- $S^{k+1} \subseteq S^k$ pour tout k
- si $s_i \in S_i^k$ mais $s_i \notin S_i^{k+1}$ alors s_i est strictement (faiblement) dominée dans le jeu réduit $G^k = \langle N, (S_i^k)_i, (u_i)_i \rangle$
- aucune action n'est strictement (faiblement) dominée dans le jeu réduit $G^K = \langle N, (S_i^K)_i, (u_i)_i \rangle$

Exemple. (domination stricte)

Définition. Un ensemble de profils de stratégies $S^* \subseteq S$ **résiste à l'élimination itérative des stratégies strictement** (**faiblement**) **dominées** s'il existe une suite d'éliminations représentée par une suite de profils de stratégies $(S^k)_{k=1}^K$, où $S^k = (S_i^k)_{i \in N}$ pour tout k, telle que

- $S^0 = S$ et $S^K = S^*$
- $S^{k+1} \subseteq S^k$ pour tout k
- si $s_i \in S_i^k$ mais $s_i \notin S_i^{k+1}$ alors s_i est strictement (faiblement) dominée dans le jeu réduit $G^k = \langle N, (S_i^k)_i, (u_i)_i \rangle$
- aucune action n'est strictement (faiblement) dominée dans le jeu réduit $G^K = \langle N, (S_i^K)_i, (u_i)_i \rangle$

Exemple. (domination stricte)

	G	D
H	$(3,0)$	$(0,1)$
M	$(0,0)$	$(3,1)$
B	$(1,1)$	$(1,0)$

Définition. Un ensemble de profils de stratégies $S^* \subseteq S$ **résiste à l'élimination itérative des stratégies strictement** (**faiblement**) **dominées** s'il existe une suite d'éliminations représentée par une suite de profils de stratégies $(S^k)_{k=1}^K$, où $S^k = (S_i^k)_{i \in N}$ pour tout k, telle que

- $S^0 = S$ et $S^K = S^*$
- $S^{k+1} \subseteq S^k$ pour tout k
- si $s_i \in S_i^k$ mais $s_i \notin S_i^{k+1}$ alors s_i est strictement (faiblement) dominée dans le jeu réduit $G^k = \langle N, (S_i^k)_i, (u_i)_i \rangle$
- aucune action n'est strictement (faiblement) dominée dans le jeu réduit $G^K = \langle N, (S_i^K)_i, (u_i)_i \rangle$

Exemple. (domination stricte)

	G	D
H	$(3,0)$	$(0,1)$
M	$(0,0)$	$(3,1)$
B	$(1,1)$	$(1,0)$

$\Rightarrow$

	G	D
H	$(3,0)$	$(0,1)$
M	$(0,0)$	$(3,1)$

Définition. Un ensemble de profils de stratégies $S^* \subseteq S$ **résiste à l'élimination itérative des stratégies strictement** (**faiblement**) **dominées** s'il existe une suite d'éliminations représentée par une suite de profils de stratégies $(S^k)_{k=1}^K$, où $S^k = (S_i^k)_{i \in N}$ pour tout k, telle que

- $S^0 = S$ et $S^K = S^*$
- $S^{k+1} \subseteq S^k$ pour tout k
- si $s_i \in S_i^k$ mais $s_i \notin S_i^{k+1}$ alors s_i est strictement (faiblement) dominée dans le jeu réduit $G^k = \langle N, (S_i^k)_i, (u_i)_i \rangle$
- aucune action n'est strictement (faiblement) dominée dans le jeu réduit $G^K = \langle N, (S_i^K)_i, (u_i)_i \rangle$

Exemple. (domination stricte)

	G	D
H	$(3,0)$	$(0,1)$
M	$(0,0)$	$(3,1)$
B	$(1,1)$	$(1,0)$

$\Rightarrow$

	G	D
H	$(3,0)$	$(0,1)$
M	$(0,0)$	$(3,1)$

$\Rightarrow$

	D
H	$(0,1)$
M	$(3,1)$

Définition. Un ensemble de profils de stratégies $S^* \subseteq S$ **résiste à l'élimination itérative des stratégies strictement** (**faiblement**) **dominées** s'il existe une suite d'éliminations représentée par une suite de profils de stratégies $(S^k)_{k=1}^K$, où $S^k = (S_i^k)_{i \in N}$ pour tout k, telle que

- $S^0 = S$ et $S^K = S^*$
- $S^{k+1} \subseteq S^k$ pour tout k
- si $s_i \in S_i^k$ mais $s_i \notin S_i^{k+1}$ alors s_i est strictement (faiblement) dominée dans le jeu réduit $G^k = \langle N, (S_i^k)_i, (u_i)_i \rangle$
- aucune action n'est strictement (faiblement) dominée dans le jeu réduit $G^K = \langle N, (S_i^K)_i, (u_i)_i \rangle$

Exemple. (domination stricte)

	G	D
H	$(3,0)$	$(0,1)$
M	$(0,0)$	$(3,1)$
B	$(1,1)$	$(1,0)$

$\Rightarrow$

	G	D
H	$(3,0)$	$(0,1)$
M	$(0,0)$	$(3,1)$

$\Rightarrow$

	D
H	$(0,1)$
M	$(3,1)$

$\Rightarrow$

	D
M	$(3,1)$

Proposition. *L'ensemble S^* qui résiste à l'élimination itérative des stratégies strictement dominées est défini de manière unique*

Proposition. *L'ensemble S^* qui résiste à l'élimination itérative des stratégies strictement dominées est défini de manière unique*

Par conséquent, l'ordre d'élimination des stratégies strictement dominées n'affecte pas le résultat final

Proposition. *L'ensemble S^* qui résiste à l'élimination itérative des stratégies strictement dominées est défini de manière unique*

Par conséquent, l'ordre d'élimination des stratégies strictement dominées n'affecte pas le résultat final

L'ensemble S^* est aussi appelé ensemble des stratégies rationalisables

Cependant, l'ordre d'élimination des stratégies faiblement dominées affecte le résultat final

Cependant, l'ordre d'élimination des stratégies faiblement dominées affecte le résultat final

Exemple.

Cependant, l'ordre d'élimination des stratégies faiblement dominées affecte le résultat final

Exemple.

	G	D
H	$(1,1)$	$(0,0)$
M	$(1,1)$	$(2,1)$
B	$(0,0)$	$(2,1)$

Cependant, l'ordre d'élimination des stratégies faiblement dominées affecte le résultat final

Exemple.

	G	D
H	$(1,1)$	$(0,0)$
M	$(1,1)$	$(2,1)$
B	$(0,0)$	$(2,1)$

Cependant, l'ordre d'élimination des stratégies faiblement dominées affecte le résultat final

Exemple.

	G	D
H	$(1,1)$	$(0,0)$
M	$(1,1)$	$(2,1)$
B	$(0,0)$	$(2,1)$

Cependant, l'ordre d'élimination des stratégies faiblement dominées affecte le résultat final

Exemple.

	G	D
H	$(1, 1)$	$(0, 0)$
M	$(1, 1)$	$(2, 1)$
B	$(0, 0)$	$(2, 1)$

Cependant, l'ordre d'élimination des stratégies faiblement dominées affecte le résultat final

Exemple.

	G	D
H	$(1,1)$	$(0,0)$
M	$(1,1)$	$(2,1)$
B	$(0,0)$	$(2,1)$

Cependant, l'ordre d'élimination des stratégies faiblement dominées affecte le résultat final

Exemple.

	G	D
H	$(1,1)$	$(0,0)$
M	$(1,1)$	$(2,1)$
B	$(0,0)$	$(2,1)$

Cependant, l'ordre d'élimination des stratégies faiblement dominées affecte le résultat final

Exemple.

	G	D
H	$(1,1)$	$(0,0)$
M	$(1,1)$	$(2,1)$
B	$(0,0)$	$(2,1)$

Cependant, l'ordre d'élimination des stratégies faiblement dominées affecte le résultat final

Exemple.

	G	D
H	$(1,1)$	$(0,0)$
M	$(1,1)$	$(2,1)$
B	$(0,0)$	$(2,1)$

Cependant, l'ordre d'élimination des stratégies faiblement dominées affecte le résultat final

Exemple.

	G	D
H	$(1,1)$	$(0,0)$
M	$(1,1)$	$(2,1)$
B	$(0,0)$	$(2,1)$

Cependant, l'ordre d'élimination des stratégies faiblement dominées affecte le résultat final

Exemple.

	G	D
H	$(1,1)$	$(0,0)$
M	$(1,1)$	$(2,1)$
B	$(0,0)$	$(2,1)$

Cependant, l'ordre d'élimination des stratégies faiblement dominées affecte le résultat final

Exemple.

	G	D
H	$(1,1)$	$(0,0)$
M	$(1,1)$	$(2,1)$
B	$(0,0)$	$(2,1)$

Cependant, l'ordre d'élimination des stratégies faiblement dominées affecte le résultat final

Exemple.

	G	D
H	$(1,1)$	$(0,0)$
M	$(1,1)$	$(2,1)$
B	$(0,0)$	$(2,1)$

Cependant, l'ordre d'élimination des stratégies faiblement dominées affecte le résultat final

Exemple.

	G	D
H	$(1, 1)$	$(0, 0)$
M	$(1, 1)$	$(2, 1)$
B	$(0, 0)$	$(2, 1)$

Proposition. *Toute action jouée avec une probabilité positive à un équilibre de Nash résiste à l'élimination itérative des stratégies strictement dominées. Ceci n'est pas vrai pour l'élimination itérative des stratégies faiblement dominées. Cependant, après une élimination itérative des stratégies faiblement dominées il existe toujours au moins un équilibre de Nash*

Exemple. Considérons le duopole de Cournot avec $\theta_1 = \theta_2 = -1$:

$$u_i(s_1, s_2) = s_i(1 - s_1 - s_2) \qquad \mathrm{MR}_i(s_j) = \left\{ \frac{1 - s_j}{2} \right\}$$

Exemple. Considérons le duopole de Cournot avec $\theta_1 = \theta_2 = -1$:

$$u_i(s_1, s_2) = s_i(1 - s_1 - s_2) \qquad \mathrm{MR}_i(s_j) = \left\{ \frac{1 - s_j}{2} \right\}$$

Le seul profil de stratégies qui résiste à l'élimination itérative des stratégies strictement dominées est l'EN

Exemple. Considérons le duopole de Cournot avec $\theta_1 = \theta_2 = -1$:

$$u_i(s_1, s_2) = s_i(1 - s_1 - s_2) \qquad \mathrm{MR}_i(s_j) = \left\{ \frac{1 - s_j}{2} \right\}$$

Le seul profil de stratégies qui résiste à l'élimination itérative des stratégies strictement dominées est l'EN

$$S_i^1 = \mathrm{MR}_i([0, 1]) = [\mathrm{MR}_i(1), \mathrm{MR}_i(0)] = [0, 1/2],$$

toutes les stratégies supérieures à $1/2$ étant strictement dominées par la stratégie $1/2$. De même, aux itérations suivantes on obtient

Exemple. Considérons le duopole de Cournot avec $\theta_1 = \theta_2 = -1$:

$$u_i(s_1, s_2) = s_i(1 - s_1 - s_2) \qquad \mathrm{MR}_i(s_j) = \left\{ \frac{1 - s_j}{2} \right\}$$

Le seul profil de stratégies qui résiste à l'élimination itérative des stratégies strictement dominées est l'EN

$$S_i^1 = \mathrm{MR}_i([0, 1]) = [\mathrm{MR}_i(1), \mathrm{MR}_i(0)] = [0, 1/2],$$

toutes les stratégies supérieures à $1/2$ étant strictement dominées par la stratégie $1/2$. De même, aux itérations suivantes on obtient

$$S_i^2$$

Exemple. Considérons le duopole de Cournot avec $\theta_1 = \theta_2 = -1$:

$$u_i(s_1, s_2) = s_i(1 - s_1 - s_2) \qquad \mathrm{MR}_i(s_j) = \left\{ \frac{1 - s_j}{2} \right\}$$

Le seul profil de stratégies qui résiste à l'élimination itérative des stratégies strictement dominées est l'EN

$$S_i^1 = \mathrm{MR}_i([0,1]) = [\mathrm{MR}_i(1), \mathrm{MR}_i(0)] = [0, 1/2],$$

toutes les stratégies supérieures à $1/2$ étant strictement dominées par la stratégie $1/2$. De même, aux itérations suivantes on obtient

$$S_i^2 = \mathrm{MR}_i([0, 1/2]) = [\mathrm{MR}_i(1/2), \mathrm{MR}_i(0)] = [1/4, 1/2]$$

Exemple. Considérons le duopole de Cournot avec $\theta_1 = \theta_2 = -1$:

$$u_i(s_1, s_2) = s_i(1 - s_1 - s_2) \qquad \mathrm{MR}_i(s_j) = \left\{ \frac{1 - s_j}{2} \right\}$$

Le seul profil de stratégies qui résiste à l'élimination itérative des stratégies strictement dominées est l'EN

$$S_i^1 = \mathrm{MR}_i([0,1]) = [\mathrm{MR}_i(1), \mathrm{MR}_i(0)] = [0, 1/2],$$

toutes les stratégies supérieures à $1/2$ étant strictement dominées par la stratégie $1/2$. De même, aux itérations suivantes on obtient

$$S_i^2 = \mathrm{MR}_i([0,1/2]) = [\mathrm{MR}_i(1/2), \mathrm{MR}_i(0)] = [1/4, 1/2]$$

$$S_i^3$$

Exemple. Considérons le duopole de Cournot avec $\theta_1 = \theta_2 = -1$:

$$u_i(s_1, s_2) = s_i(1 - s_1 - s_2) \qquad \mathrm{MR}_i(s_j) = \left\{ \frac{1 - s_j}{2} \right\}$$

Le seul profil de stratégies qui résiste à l'élimination itérative des stratégies strictement dominées est l'EN

$$S_i^1 = \mathrm{MR}_i([0,1]) = [\mathrm{MR}_i(1), \mathrm{MR}_i(0)] = [0, 1/2],$$

toutes les stratégies supérieures à $1/2$ étant strictement dominées par la stratégie $1/2$. De même, aux itérations suivantes on obtient

$$S_i^2 = \mathrm{MR}_i([0,1/2]) = [\mathrm{MR}_i(1/2), \mathrm{MR}_i(0)] = [1/4, 1/2]$$

$$S_i^3 = \mathrm{MR}_i([1/4,1/2]) = [\mathrm{MR}_i(1/2), \mathrm{MR}_i(1/4)] = [1/4, 3/8]$$

Exemple. Considérons le duopole de Cournot avec $\theta_1 = \theta_2 = -1$:

$$u_i(s_1, s_2) = s_i(1 - s_1 - s_2) \qquad \mathrm{MR}_i(s_j) = \left\{ \frac{1 - s_j}{2} \right\}$$

Le seul profil de stratégies qui résiste à l'élimination itérative des stratégies strictement dominées est l'EN

$$S_i^1 = \mathrm{MR}_i([0, 1]) = [\mathrm{MR}_i(1), \mathrm{MR}_i(0)] = [0, 1/2],$$

toutes les stratégies supérieures à $1/2$ étant strictement dominées par la stratégie $1/2$. De même, aux itérations suivantes on obtient

$$\begin{aligned} S_i^2 &= \mathrm{MR}_i([0, 1/2]) = [\mathrm{MR}_i(1/2), \mathrm{MR}_i(0)] = [1/4, 1/2] \\ S_i^3 &= \mathrm{MR}_i([1/4, 1/2]) = [\mathrm{MR}_i(1/2), \mathrm{MR}_i(1/4)] = [1/4, 3/8] \\ &\vdots \end{aligned}$$

Exemple. Considérons le duopole de Cournot avec $\theta_1 = \theta_2 = -1$:

$$u_i(s_1, s_2) = s_i(1 - s_1 - s_2) \qquad \mathrm{MR}_i(s_j) = \left\{ \frac{1 - s_j}{2} \right\}$$

Le seul profil de stratégies qui résiste à l'élimination itérative des stratégies strictement dominées est l'EN

$$S_i^1 = \mathrm{MR}_i([0,1]) = [\mathrm{MR}_i(1), \mathrm{MR}_i(0)] = [0, 1/2],$$

toutes les stratégies supérieures à 1/2 étant strictement dominées par la stratégie 1/2. De même, aux itérations suivantes on obtient

$$S_i^2 = \mathrm{MR}_i([0,1/2]) = [\mathrm{MR}_i(1/2), \mathrm{MR}_i(0)] = [1/4, 1/2]$$

$$S_i^3 = \mathrm{MR}_i([1/4,1/2]) = [\mathrm{MR}_i(1/2), \mathrm{MR}_i(1/4)] = [1/4, 3/8]$$

$$\vdots$$

Puisque $\mathrm{MR}_i(s_j) = \frac{1-s_j}{2}$ est telle que $|\mathrm{MR}_i'(s_j)| = 1/2 < 1$ pour tout s_j, la procédure $S_i^n = \mathrm{MR}_i(S_i^{n-1})$ converge vers le point fixe de la fonction MR_i, qui est bien l'équilibre de Nash du jeu, $s_i^* = 1/3$

Références

von Neumann, J. (1928) : “Zur Theories der Gesellschaftsspiele,” Math. Ann., 100, 295–320.