Information incomplète et jeux Bayésiens

Plan du chapitre
(22 juillet 2008)

1/
- Structure d'information, connaissance et connaissance commune, croyance
- Jeux et équilibres Bayésiens
- Applications
  - Théorème d'impossibilité de spéculation / pari
  - Réinterprétation des stratégies mixtes
  - Corrélation et communication

Hypothèse implicite dans les jeux (sous forme normale et extensive) :

Tous les joueurs connaissent parfaitement le jeu

Cependant, dans de nombreuses interactions économiques l'*information* est *imparfaite* et *asymétrique* :

2/
- ☞ Décideurs politiques : état de l'économie, réactions et anticipations des citoyens
- ☞ Firmes : coûts, niveau de la demande, découvertes des autres en R&D
- ☞ Négociateurs : évaluation et patience des adversaires, ...
- ☞ Enchérisseurs : valeur de l'objet, évaluation des autres enchérisseurs
- ☞ Actionnaires : valeur de la firme
- ☞ Relations principal/agent, contrats : les assureurs, employeurs, régulateurs, ... ne connaissent pas les "types" des agents

Système d'information

- Ensemble des **états du monde** : Ω
  $\omega \in \Omega$: description complète du monde (préférences et informations des joueurs)
- **Fonction d'information** du joueur i :

$$P_i : \Omega \to 2^\Omega$$

3/

Hypothèses :

$\omega \in P_i(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$: *correcte* ("axiome de vérité")
$\omega' \in P_i(\omega) \Rightarrow P_i(\omega') = P_i(\omega)$: *partitionnelle*

➥ Partition $\mathcal{P}_i = \{P_i(\omega) : \omega \in \Omega\}$ du joueur i

Ensemble d'information du joueur i en ω : $P_i(\omega) =$ élément de $\mathcal{P}_i$ contenant ω

Chaque joueur connaît les partitions des autres joueurs (sinon, un état ω ne serait pas une description **complète** du monde)

Exemples

$\Omega = \{00, 01, 02, \ldots, 97, 98, 99\}$ et l'agent peut uniquement lire le premier chiffre :

4/

$$\begin{array}{lllllll}
P_i(00) & = & \ldots & = & P_i(09) & = & \{00, 01, \ldots, 09\} \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots \\
P_i(k0) & = & \ldots & = & P_i(k9) & = & \{k0, k1, \ldots, k9\} \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots \\
P_i(90) & = & \ldots & = & P_i(99) & = & \{90, 91, \ldots, 99\}
\end{array}$$

$\Rightarrow$

Partition $\mathcal{P}_i = \{\{00, \ldots, 09\}, \ldots, \{90, \ldots, 99\}\}$

Correcte ($\omega \in P_i(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$)

$\Omega = \{00, 01, 02, \ldots, 97, 98, 99\}$ et l'agent peut parfaitement lire les deux chiffres
Mais il lit à l'envers :

$$P_i(kl) = \{lk\}$$

$\Rightarrow$ partition mais $\omega \notin P_i(\omega)$ (*erreurs*)

5/ $\Omega = \{B, M\}$ et l'agent se rappelle uniquement des bonnes nouvelles :

$$P_i(B) = \{B\} \quad P_i(M) = \{B, M\}$$

$\Rightarrow \omega \in P_i(\omega)$ pour tout ω : information correcte mais non partitionnelle :

$B \in P_i(M)$ mais $P_i(B) \neq P_i(M)$ (*introspection imparfaite*)

Le joueur i est **plus informé** que le joueur j si la partition $\mathcal{P}_i$ est plus fine que $\mathcal{P}_j$, i.e.

$$P_i(\omega) \subseteq P_j(\omega) \ \forall \ \omega \in \Omega$$

Exemples

Pile ou face, seul le joueur 1 observe le résultat :

6/ $$\Omega = \{P, F\} \quad \mathcal{P}_1 = \{\{P\}, \{F\}\} \quad \mathcal{P}_2 = \{\{P, F\}\}$$

☞ Le joueur 1 est mieux informé que le joueur 2

Le joueur 1 ne sait pas si le joueur 2 a triché :

$$\Omega = \{P, P^T, F, F^T\} \quad \mathcal{P}_1 = \{\{P, P^T\}, \{F, F^T\}\} \quad \mathcal{P}_2 = \{\{P, F\}, \{P^T\}, \{F^T\}\}$$

☞ Aucun joueur n'est mieux informé que l'autre

Connaissance individuelle

Opérateur de connaissance : $K_i : 2^\Omega \to 2^\Omega$

$$\begin{aligned} K_iE &= \{\omega \in \Omega : P_i(\omega) \subseteq E\} \\ &= \text{ensemble des états où le joueur } i \text{ sait } \textbf{que} \text{ l'événement } E \text{ s'est réalisé} \end{aligned}$$

7/

$$\begin{aligned} W_iE &= K_iE \cup K_i\neg E \\ &= \text{ensemble des états où le joueur } i \text{ sait } \textbf{si} \text{ l'événement } E \text{ s'est réalisé} \end{aligned}$$

Propriétés de l'opérateur de connaissance K_i.

$K_i\Omega = \Omega$ (*nécessité*) : un agent sait toujours que l'événement universel Ω est réalisé. Les individus ne peuvent donc pas être surpris par des événements "inattendus"

$K_i(E \cap F) = K_iE \cap K_iF$ (axiome de *fermeture déductive*) : un agent sait E et F si et seulement s'il connaît E et s'il connaît F ($\Rightarrow$ omniscience logique :
8/ $E \subseteq F \Rightarrow K_iE \subseteq K_iF$)

$K_iE \subseteq E$ (*axiome de vérité*) : ce qu'un agent connaît est toujours vrai. Cet axiome permet de distinguer théoriquement la *connaissance* de la *croyance*

$K_iE \subseteq K_i^2E$ (axiome de transparence ou axiome d'*introspection positive*) : si un agent connaît E, alors il sait qu'il connaît E

$\neg K_iE \subseteq K_i\neg K_iE$ (axiome d'*introspection négative*) : si un agent ne connaît pas E, alors il sait qu'il ne connaît pas E (le plus restrictif)

Exemple. $\Omega = \{1,2,3,4\}$ $\mathcal{P}_1 = \{\{1\},\{2\},\{3,4\}\}$ $\mathcal{P}_2 = \{\{1,2\},\{3,4\}\}$

$E = \{3\} \Rightarrow K_1E = K_2E = \emptyset$: personne ne connaît E

$E = \{1,3\} \Rightarrow K_1E = \{1\}$, $K_2E = \emptyset$, $K_1\neg E = \{2\}$
$\Rightarrow W_1E = \{1,2\}$, $K_2W_1E = \{1,2\}$, $K_2\neg W_1E = \{3,4\}$, $W_2W_1E = \Omega$
$\Rightarrow E$ est une *connaissance privée* pour le joueur 1 en $\omega = 1$
9/ et le joueur 2 sait toujours si le joueur 1 sait si E s'est réalisé

Si $\mathcal{P}_2 = \{\{1,2,3,4\}\}$ alors $K_2W_1E = \emptyset$, $K_2\neg W_1E = \emptyset$, $W_2W_1E = \emptyset$
i.e., E est une *connaissance privée* pour le joueur 1 en $\omega = 1$ et *secrète*
(le joueur 2 ne sait jamais si le joueur 1 sait si E s'est réalisé)

Connaissances interactives

Connaissance mutuelle/partagée :

$KE = \bigcap_{i\in N} K_iE$
= ensemble des états où tous les joueurs savent que E s'est réalisé

10/ **Connaissance mutuelle à l'ordre k** :

$K^kE = \underbrace{K\cdots K}_{k \text{ fois}} E$
= ensemble des états où tous les joueurs savent que tous les joueurs savent ... [k fois] que E s'est réalisé

Connaissance commune (Lewis, 1969; Aumann, 1976) :

$$\begin{aligned} CKE &= K^{\infty}E \\ &= \text{ensemble des états où tous les joueurs savent que tous les joueurs savent} \\ &\quad \ldots \text{ [à l'infini] que } E \text{ s'est réalisé} \\ &= \{\omega \in \Omega : M(\omega) \subseteq E\} \end{aligned}$$

11/ où $M(\omega)$ est l'élément de la *partition de connaissance commune* ("*Meet*"), $\mathcal{M} = \bigwedge_{i \in N} \mathcal{P}_i$, la partition la plus fine parmi toutes celles qui sont plus grossières que les partitions individuelles $\mathcal{P}_i$, $i \in N$

Connaissance distribuée :

$$\begin{aligned} DE &= \{\omega \in \Omega : \textstyle\bigcap_{i \in N} P_i(\omega) \subseteq E\} \\ &= \text{ensemble des états où tous les joueurs savent que } E \text{ s'est réalisé} \\ &\quad \text{s'ils mettent toutes leurs informations en commun} \end{aligned}$$

Exemple

$$\Omega = \{1,2,3,4,5\} \quad \mathcal{P}_1 = \{\{1\},\{2,3\},\{4,5\}\} \quad \mathcal{P}_2 = \{\{1\},\{2\},\{3,4\},\{5\}\}$$

$$E = \{3,4,5\}$$

$K_1E = \{4,5\}$, $K_2E = \{3,4,5\} \Rightarrow KE = \{4,5\}$:

E est une connaissance mutuelle en $\omega = 4$ ou 5

12/ $K_1KE = \{4,5\}$, $K_2KE = \{5\} \Rightarrow KKE = \{5\}$:

E est une connaissance mutuelle à l'ordre 2 en $\omega = 5$

$K_1KKE = \emptyset$, $K_2KKE = \{5\} \Rightarrow KKKE = \emptyset$:

E n'est jamais une connaissance mutuelle à l'ordre 3

$\Rightarrow E$ n'est jamais une connaissance commune

Au contraire, $F = \{2,3,4,5\}$ est une connaissance commune dès que F se réalise

$$\mathcal{M} = \{\{1\},\{2,3,4,5\}\}$$

Croyances et consensus

Distribution de *probabilité a priori commune* : $p \in \Delta(\Omega)$

Croyance a posteriori du joueur i sur l'événement $E \subseteq \Omega$ en l'état $\omega \in \Omega$:

$$p(E \mid P_i(\omega)) = \frac{p(E \cap P_i(\omega))}{p(P_i(\omega))}$$

13/

➥ Les *différences de croyances* entre individus s'expliquent uniquement par des *différences d'information*

En particulier, les agents ne peuvent pas s'accorder sur un désaccord : si leurs croyances sur un événement E sont une connaissance commune, alors leurs croyances sur E sont identiques

Formellement :

Théorème. (We can't agree to disagree. Aumann, 1976) *Considérons un ensemble N d'agents avec les mêmes croyances a priori sur Ω et des informations partitionnelles sur Ω. Soit $E \subseteq \Omega$ un événement. S'il est de connaissance commune en un état du monde $\omega \in \Omega$ que chaque agent i a la croyance a posteriori q_i sur E, alors ces croyances a posteriori sont égales : $q_i = q_j$, pour tout $i, j \in N$*

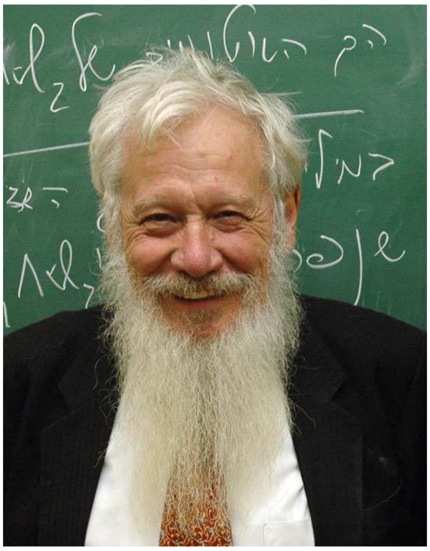
Preuve. Considérons un agent $i \in N$ et l'événement "la croyance a posteriori
14/ de i sur E est égale à q_i" :

$$F_i = \{\omega \in \Omega : \Pr[E \mid P_i(\omega)] = q_i\}$$

F_i est connaissance commune en ω ssi $M(\omega) \subseteq F_i$, i.e., $\Pr[E \mid P_i(\omega')] = q_i$ pour tout $\omega' \in M(\omega)$. D'où

$$\Pr[E \mid M(\omega)] = q_i$$

car $M(\omega)$ est une union d'éléments $P_i(\omega')$ de $\mathcal{P}_i$ et ces éléments sont disjoints □



15/

FIG. 1 – Robert Aumann (1930–), prix Nobel d'économie en 2005

✍ Montrer à l'aide d'un exemple simple qu'il peut cependant être de connaissance commune que deux individus ont des croyances a posteriori (sur un événement E) différentes

✍ Montrer, en suivant la preuve du théorème précédent, qu'il ne peut pas être de connaissance commune entre deux individus que la croyance a posteriori de
16/ l'individu 1 sur un événement E est strictement supérieure à celle de l'individu 2

✍ Montrer que le résultat ne s'applique pas en remplaçant "connaissance commune" par "connaissance mutuelle" (prendre $\Omega = 1234$, p uniforme, $\mathcal{P}_1 = \{12, 34\}$, $\mathcal{P}_2 = \{123, 4\}$, $E = 14$ et $\omega = 1$)

Le résultat se généralise facilement à la communication de toute règle (fonction) $f : 2^\Omega \to D$ qui est *consistante par union* (*union-consistent*), i.e., telle que pour tout $E \subseteq \Omega$, $F \subseteq \Omega$ disjoints ($E \cap F = \emptyset$), si $f(E) = f(F)$, alors $f(E \cup F) = f(E) = f(F)$

Exemples : probabilités a posteriori, espérance conditionnelle, décision qui maximise une utilité espérée, ...

En communicant (publiquement), les valeurs de la fonction pour chaque agent deviennent connaissance commune, donc égales (**consensus**)

➥ "**We can't disagree forever**" (Geanakoplos et Polemarchakis, 1982; Cave, 1983)

✍ Montrer que les agents n'aboutissent cependant pas nécessaire au même consensus que s'ils avaient communiqué directement toutes leurs informations (prendre $\Omega = 1234$, p uniforme, $\mathcal{P}_1 = \{12, 34\}$, $\mathcal{P}_2 = \{13, 24\}$, $E = 14$, $f(\cdot) = \Pr(E \mid \cdot)$, et $\omega = 1$)

➥ Si deux détectives avec les mêmes préférences se communiquent le nom du suspect qu'ils désirent arrêter, alors après un certain temps ils vont nécessairement être d'accord, mais pas nécessairement sur le même suspect que s'ils avaient directement partagé tous leurs indices

Jeu Bayésien

$$G = \langle N,\, \Omega,\, p,\, (\mathcal{P}_i)_i,\, (A_i)_i,\, (u_i)_i \rangle$$

- $N = \{1, \ldots, n\}$: ensemble des *joueurs*
- Ω : ensemble des *états du monde*
- $p \in \Delta(\Omega)$: distribution de probabilité a priori strictement positive
- $\mathcal{P}_i$: *partition d'information* du joueur i ($i = 1, \ldots, n$)
- A_i : ensemble non vide des *actions* du joueur i ($i = 1, \ldots, n$)

19/

- $u_i : A_1 \times \cdots \times A_n \times \Omega \to \mathbb{R}$: *fonction d'utilité* du joueur i ($i = 1, \ldots, n$)

Représentation alternative équivalente (Harsanyi, 1967–1968) :

Ω	➠	$T = T_1 \times \cdots \times T_n$: espace des *types*
$p \in \Delta(\Omega)$	➠	$p \in \Delta(T)$
$\mathcal{P}_i$	➠	T_i : ensemble des types du joueur i
$u_i(a; \omega)$	➠	$u_i(a; (t_1, \ldots, t_n))$

Cas particuliers

Problème de décision individuelle

$$\langle \Omega, p, \mathcal{P}, A, u \rangle$$

Stratégie (acte, règle de décision) $s : \Omega \to A$, mesurable par rapport à $\mathcal{P}$

20/

Proposition. Dans ce modèle, une règle de décision s est *ex-ante optimale*, c'est-à-dire s est solution de

$$\max_{s} \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega)\ u(s(\omega); \omega)$$

si et seulement si elle est *interim optimale*, c'est-à-dire, pour tout $\omega \in \Omega$, $s(\omega)$ est solution de

$$\max_{s(\omega)} \sum_{\omega' \in \Omega} p(\omega' \mid P(\omega))\ u(s(\omega); \omega')$$

Proposition. Dans un problème de décision individuelle l'information ne peut pas être défavorable pour un joueur

Preuve. Si $\mathcal{P}$ est plus fine que $\mathcal{P}'$ alors l'ensemble des stratégies de l'agent sur $\mathcal{P}$ contient l'ensemble de ses stratégies sur $\mathcal{P}'$: $S' \subseteq S$. Donc

$$\max_{s \in S} \mathrm{E}[u(s(\omega); \omega)] \geq \max_{s \in S'} \mathrm{E}[u(s(\omega); \omega)]$$

21/

➥ $\boxed{\text{+ d'information}} \sim \boxed{\text{+ de stratégies}}$

Plus généralement, en utilisant la propriété $\max \min$ des équilibres de Nash des jeux à somme nulle, on montre que la valeur de l'information est toujours positive dans cette classe de jeux

Rationalité limitée : on relâche, par exemple, la propriété d'introspection négative

➥ Les deux propositions précédentes ne s'appliquent plus

Exemple. $\Omega = \{1, 2, 3\}$, $P(1) = \{1, 2\}$, $P(2) = \{2\}$, $P(3) = \{2, 3\} \Rightarrow$ introspection négative non vérifiée car $K\neg K\{2\} = K\neg\{2\} = K\{1, 3\} = \emptyset$

Dans le problème de décision suivant

22/

	Parier	Ne pas parier	Pr
ω_1	-2	0	$1/3$
ω_2	3	0	$1/3$
ω_3	-2	0	$1/3$

la règle de décision optimale ex-post est PPP alors que la règle de décision optimale ex-ante est NPN

De plus, la valeur de l'information est négative dans le cas de l'optimisation ex-post (le gain sans information serait nul au lieu d'être négatif)

Information parfaite

$$P_i(\omega) = \{\omega\}, \quad \forall\, \omega \in \Omega$$

Information symétrique

23/

$$\mathcal{P}_i = \mathcal{P}_j, \quad \forall\, i,\, j \in N$$

Types indépendants

$$p\left[\bigcap_{i\in N} P_i(\omega)\right] = \prod_{i\in N} p\left[P_i(\omega)\right]$$

➠ $p((t_i)_{i\in N}) = p(t_1) \times \cdots \times p(t_n)$

Équilibre de Nash (Bayésien)

– Stratégie pure du joueur i

$$s_i : \Omega \to A_i, \text{ mesurable par rapport à } \mathcal{P}_i$$

– Stratégie mixte du joueur i

$$\sigma_i : \Omega \to \Delta(A_i), \text{ mesurable par rapport à } \mathcal{P}_i$$

24/

➢ Stratégie "*mélangeante*" (*pooling*) :

$$\sigma_i(\omega) = \sigma_i(\omega') \quad \forall\, \omega,\, \omega' \in \Omega$$

➢ Stratégie *séparatrice* :

$$s_i(\omega) \neq s_i(\omega') \quad \forall\, \omega,\, \omega' \text{ t.q. } P_i(\omega) \neq P_i(\omega')$$

Ensemble des stratégies pures (mixtes) du joueur i dans G : S_i (Σ_i)

Définition. Un **équilibre de Nash-Bayésien** du jeu Bayésien G est un équilibre de Nash du jeu sous forme normale

$$\widetilde{G} = \langle N,\, (\Sigma_i)_i,\, (\tilde{u}_i)_i \rangle$$

où $\tilde{u}_i(\sigma) \equiv \mathrm{E}[u_i(\sigma(\cdot);\cdot)] = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) u_i(\sigma(\omega);\omega)$

c'est-à-dire, un profil de stratégies $\sigma^* = (\sigma_i^*)_{i \in N}$ t.q.

$$\mathrm{E}[u_i(\sigma_i^*(\cdot), \sigma_{-i}^*(\cdot);\cdot)] \geq \mathrm{E}[u_i(\sigma_i(\cdot), \sigma_{-i}^*(\cdot);\cdot)]$$

25/ $\forall\, \sigma_i \in \Sigma_i,\ \forall\, i \in N$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{\omega' \in \Omega} p(\omega' \mid P_i(\omega)) u_i(\sigma_i^*(\omega), \sigma_{-i}^*(\omega');\omega') \geq \sum_{\omega' \in \Omega} p(\omega' \mid P_i(\omega)) u_i(a_i, \sigma_{-i}^*(\omega');\omega')$$

$\forall\, a_i \in A_i,\ \forall\, \omega \in \Omega,\ \forall\, i \in N$

Dans un jeu (problème de décisions interactives), avoir plus d'information peut être défavorable pour le joueur.

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}, \quad p(\omega_1) = p(\omega_2) = 1/2$$

ω_1	a	b	ω_2	a	b
a	$(0,0)$	$(6,-3)$	a	$(-20,-20)$	$(-7,-16)$
b	$(-3,6)$	$(5,5)$	b	$(-16,-7)$	$(-5,-5)$

26/ ❶ Les deux joueurs non informés : $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2 = \{\{\omega_1, \omega_2\}\}$

$\Rightarrow$ Unique EN : $(b,b) \Rightarrow \mathbf{(0,0)}$

❷ Les deux joueurs informés : $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2 = \{\{\omega_1\}, \{\omega_2\}\}$

$\Rightarrow$ Unique EN : $((a,a) \mid \omega_1)$, $((b,b) \mid \omega_2) \Rightarrow \mathbf{(-2.5,-2.5)}$

❸ Seul le joueur 1 est informé : $\mathcal{P}_1 = \{\{\omega_1\}, \{\omega_2\}\}$, $\mathcal{P}_2 = \{\{\omega_1, \omega_2\}\}$

$\Rightarrow$ Unique EN : $((a,a) \mid \omega_1)$, $((b,a) \mid \omega_2) \Rightarrow \mathbf{(-8,-3.5)}$

APPLICATIONS

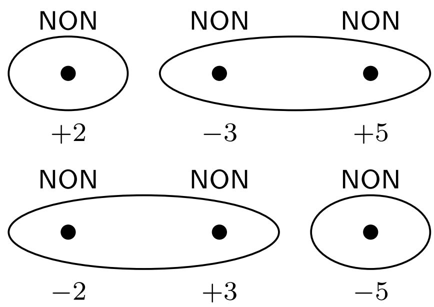
27/

Théorèmes d'impossibilité de spéculation/pari

Exemple. 2 joueurs ont la possibilité de parier sur la réalisation d'un état de la Nature dans $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, avec une distribution a priori uniforme

Paiements : $\begin{cases} \omega_1 \longrightarrow (2, -2) \\ \omega_2 \longrightarrow (-3, 3) \\ \omega_3 \longrightarrow (5, -5) \end{cases}$ Information : $\begin{cases} \mathcal{P}_1 = \{\{\omega_1\}, \{\omega_2, \omega_3\}\} \\ \mathcal{P}_2 = \{\{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3\}\} \end{cases}$

28/



$\Rightarrow$ Unique EN : jamais de pari

Cas général

Un *pari à somme nulle* $x : \Omega \to \mathbb{R}$ est proposé aux deux joueurs

Ils décident simultanément de parier (action B) ou de ne pas parier (action D)

Paiements si un des joueurs ne parie pas : $(0, 0)$

Paiements en ω si les deux joueurs parient : $(x(\omega),\ -x(\omega))$

Théorème d'impossibilité de parier. Quelle que soit la structure d'information, aucun joueur, quel que soit son ensemble d'information, ne peut espérer des gains strictement positifs à un équilibre de Nash

⇒ La spéculation "pure" ne peut pas uniquement être expliquée par les asymétries d'information

Hypothèses importantes :

- Rationalité à **tous** les états du monde
  (⇒ connaissance commune de la rationalité)
  Exemple précédent : si le joueur 2 est irrationnel en ω_3 il est possible d'observer tous les joueurs parier à tous les états
  ⇒ en ω_1 tout le monde parie et tout le monde sait que tous sont rationnels (mais la rationalité n'est pas de connaissance commune)

- Probabilités a priori **communes**
  (les différences de croyances sont uniquement justifiées par des différences d'information)

– Structure d'information **partitionnelle**

Par exemple, dans la situation

	Parier	Ne pas parier	Pr
ω_1	-2	0	$1/3$
ω_2	3	0	$1/3$
ω_3	-2	0	$1/3$

31/

avec $P_1(1) = \{1, 2\}$, $P_1(2) = \{2\}$, $P_1(3) = \{2, 3\}$ et $\mathcal{P}_2 = \{\Omega\}$, les deux joueurs parient à tous les états du monde

Réinterprétation des stratégies mixtes

Harsanyi (1973) : la stratégie mixte d'un joueur i représente l'incertitude des autres joueurs sur l'action choisie par le joueur i, incertitude due au fait que le joueur i a une petite information privée sur ses préférences

Exemple.

	a	b
a	$3 + t_1,\ 3 + t_2$	$3 + t_1,\ 0$
b	$0,\ 3 + t_2$	$4,\ 4$

32/

☞ EN si $t_1 = t_2 = 0$: (a, a), (b, b) et $\sigma_1(a) = \sigma_2(a) = 1/4$

☞ Information incomplète : t_1, t_2 i.i.d. $\mathcal{U}[0, T]$

Considérons les stratégies (symétriques) en stratégies pures suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{Jouer } a & \text{si } t_i > t^* \\ \text{Jouer } b & \text{si } t_i \le t^* \end{array}$$

	a	b
a	$3+t_1,\, 3+t_2$	$3+t_1,\, 0$
b	$0,\, 3+t_2$	$4,\, 4$

Croyance d'un joueur sur l'action choisie par l'autre joueur :

$$\mu(a) = \frac{T - t^*}{T} \qquad\qquad \mu(b) = \frac{t^*}{T}$$

33/ $\Rightarrow$ Gains espérés d'un joueur i en fonction de son action :

$$a \xrightarrow{i} 3 + t_i \qquad\qquad b \xrightarrow{i} 4\,t^*/T$$

donc $a \succ_i b \quad \Leftrightarrow \quad 3 + t_i > \frac{4\,t^*}{T} \quad \Leftrightarrow \quad t_i > \frac{4\,t^* - 3T}{T}$

La stratégie du départ est un EN du jeu Bayésien si $\frac{4\,t^*-3T}{T} = t^*$, i.e., $t^* = \frac{3T}{4-T}$, d'où

$$\mu(a) = \frac{T - t^*}{T} = 1 - \frac{3}{4-T} \overset{(T\to 0)}{\longrightarrow} 1/4 = \sigma_i(a)$$

Harsanyi (1973) montre plus généralement que tout équilibre de Nash (notamment en stratégies mixtes) d'un jeu sous forme normale G peut "presque toujours" être obtenu comme la limite d'un équilibre de Nash en stratégies pures d'un jeu perturbé à information incomplète (où les joueurs sont incertains sur les paiements des autres) quand les perturbations (incertitudes a priori, T) tendent vers 0

34/ ➥ Stabilité des stratégies mixtes

Corrélation et communication

Interprétation possible des équilibres de Nash en stratégies mixtes : les choix d'action des joueurs dépendent de *signaux privés indépendants* (heure du réveil, humeur, temps d'attente d'un bus, ...) qui n'ont pas nécessairement d'influence sur les utilités

Exemple : Bataille des sexes.

35/

	a	b
a	$(3,2)$	$(1,1)$
b	$(0,0)$	$(2,3)$

L'EN en stratégies mixtes, $((3/4,1/4),(1/4,3/4))$, génère le même résultat (donc le même paiement $(3/2,3/2)$) qu'un équilibre en stratégies pures du jeu Bayésien où chaque joueur a deux types possibles, t_i^a, t_i^b, indépendants et sans influence sur les utilités, où $\Pr(t_1^a)=\Pr(t_2^b)=3/4$, $\Pr(t_1^b)=\Pr(t_2^a)=1/4$, $\sigma_i(t_i^a)=a$, et $\sigma_i(t_i^b)=b$

✍ Écrire la structure d'information précédente à l'aide de partitions d'information

Que se passe-t-il si les joueurs peuvent observer des *signaux corrélés*, ou tout simplement *communs* (*publics*) ?

Exemple : observation publique du résultat d'un lancé d'une pièce équilibrée ($\mathcal{P}_1=\mathcal{P}_2=\{P,F\}$)

➡ Nouvel équilibre dans le jeu de la bataille des sexes, e.g., (a,a) si P et (b,b) si F

36/

☞ **Équilibre corrélé public**

La distribution d'action induite $\mu=\begin{pmatrix}1/2 & 0\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}$, et le paiement $(5/2,5/2)$

ne peuvent pas être obtenus à un équilibre de Nash du jeu original

On peut aussi avoir une situation intermédiaire entre des signaux indépendants (EN en stratégies mixtes) et des signaux publics (équilibre corrélé public = combinaison convexe d'EN)

Par exemple, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $p(\omega) = 1/3$, et

37/

$$\mathcal{P}_1 = \{\underbrace{\{\omega_1, \omega_2\}}_{a}, \underbrace{\{\omega_3\}}_{b}\}$$
$$\mathcal{P}_2 = \{\underbrace{\{\omega_1\}}_{a}, \underbrace{\{\omega_2, \omega_3\}}_{b}\}$$

ce qui génère la distribution $\mu = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$, et le paiement $(2, 2)$

Définition. (Aumann, 1974) Un **équilibre corrélé** (EC) du jeu sous forme normale

$$\langle N,\, (A_i)_{i\in N},\, (u_i)_{i\in N}\rangle$$

est un équilibre de Nash en stratégies pures d'un jeu Bayésien

$$\langle N,\, \Omega,\, p,\, (\mathcal{P}_i)_i,\, (A_i)_i,\, (u_i)_i\rangle$$

où le paiement des joueurs est indépendant de l'état du monde ($u_i(a;\omega) = u_i(a)$),

38/ c'est-à-dire un profil de stratégies pures $s = (s_1, \ldots, s_n)$ vérifiant, pour tout $i \in N$ et toute stratégie r_i du joueur i :

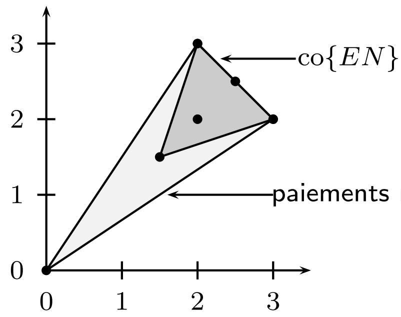
$$\sum_{\omega\in\Omega} p(\omega)\ u_i(s_i(\omega), s_{-i}(\omega)) \geq \sum_{\omega\in\Omega} p(\omega)\ u_i(r_i(\omega), s_{-i}(\omega))$$

➥ Distribution ou *résultat d'équilibre corrélé* $\mu \in \Delta(A)$, où $\mu(a) = p(\{\omega \in \Omega : s(\omega) = a\})$

➥ *Paiement d'équilibre corrélé* $\sum_{a\in A} \mu(a) u_i(a)$, $i = 1, \ldots, n$

Dans la bataille des sexes, tous les paiements d'EC que nous avons vus étaient des combinaisons convexes d'EN :

39/



☞ **Mais certains EC n'appartiennent pas à l'enveloppe convexe des EN, c'est-à-dire ne peuvent pas être obtenus avec des messages publics**

$$\mathcal{P}_1 = \{\underbrace{\{\omega_1, \omega_2\}}_{a}, \underbrace{\{\omega_3\}}_{b}\}$$

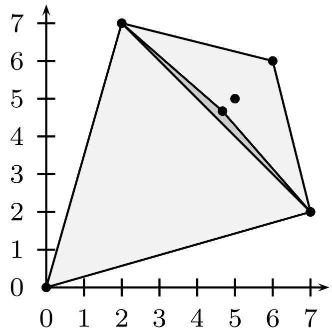
$$\mathcal{P}_2 = \{\underbrace{\{\omega_1\}}_{a}, \underbrace{\{\omega_2, \omega_3\}}_{b}\}$$

	a	b
a	$(2,7)$	$(6,6)$
b	$(0,0)$	$(7,2)$

Jeu de la "poule mouillée"

➡ Paiement d'équilibre corrélé $(5,5) \notin \mathrm{co}\{\text{EN}\}$

40/



Un EC peut même dominer au sens de Pareto tous les EN

Par exemple, dans le jeu

0,0	1,2	2,1
2,1	0,0	1,2
1,2	2,1	0,0

41/ l'unique distribution d'EN est $\begin{pmatrix} 1/9 & 1/9 & 1/9 \\ 1/9 & 1/9 & 1/9 \\ 1/9 & 1/9 & 1/9 \end{pmatrix}$, avec un paiement espéré égal à $\frac{1+2}{3} = 1$ pour chaque joueur, alors que la distribution d'EC $\begin{pmatrix} 0 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 0 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 0 \end{pmatrix}$ donne $3/2$ à chaque joueur

Proposition.

① *Dans la définition de l'EC on peut autoriser les joueurs à utiliser des stratégies mixtes dans le jeu Bayésien, ceci ne modifie pas l'ensemble des résultats d'EC. En particulier, un résultat d'EN en stratégies mixtes est un résultat d'EC*

② *Toute combinaison convexe de résultats d'EC est un résultat d'EC*

Preuve. Il suffit de construire le système d'information approprié (voir aussi Osborne et Rubinstein, 1994, propositions 45.3 et 46.2) □

42/

Systèmes d'informations considérés dans les exemples précédents :

- ➢ Ensemble des états du monde $\Omega \subseteq$ ensemble des profils d'actions A
- ➢ Chaque joueur est uniquement informé de son action à jouer

➥ **Système d'information canonique**

Proposition. *Tout résultat d'équilibre corrélé d'un jeu sous forme normale* $\langle N, (A_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\rangle$ *est un résultat d'***équilibre corrélé canonique***, où le système d'information et les stratégies associés sont tels que :*

- $\Omega = A$
- $\mathcal{P}_i = \{\{a \in A : a_i = b_i\} : b_i \in A_i\}$ *pour tout* $i \in N$
- $s_i(a) = a_i$ *pour tout* $a \in A$ *et* $i \in N$

43/

➥ **Principe de révélation pour les jeux à information complète**

Autre interprétation possible d'un EC canonique : EN d'un jeu où un **médiateur** fait des recommandations privées d'action à chaque joueur, et chaque joueur a intérêt à suivre les recommandations du médiateur si les autres font de même

Ensemble des équilibres corrélés $\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 \\ \mu_3 & \mu_4 \end{pmatrix}$ du jeu

	a	b
a	$(2,7)$	$(6,6)$
b	$(0,0)$	$(7,2)$

44/ Conditions d'incitation :

Joueur 1 $\begin{cases} 2\mu_1 + 6\mu_2 \geq 7\mu_2 \\ 7\mu_4 \geq 2\mu_3 + 6\mu_4 \end{cases}$ Joueur 2 $\begin{cases} 7\mu_1 \geq 6\mu_1 + 2\mu_3 \\ 6\mu_2 + 2\mu_4 \geq 7\mu_2 \end{cases}$

$$\iff \quad \begin{cases} \mu_2 \leq 2\mu_1 \\ \mu_2 \leq 2\mu_4 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 2\mu_3 \leq \mu_4 \\ 2\mu_3 \leq \mu_1 \end{cases}$$

Références

AUMANN, R. J. (1974) : "Subjectivity and Correlation in Randomized Strategies," *Journal of Mathematical Economics*, 1, 67–96.

——— (1976) : "Agreeing to Disagree," *The Annals of Statistics*, 4, 1236–1239.

CAVE, J. A. K. (1983) : "Learning to Agree," *Economics Letters*, 12, 147–152.

GEANAKOPLOS, J. ET H. M. POLEMARCHAKIS (1982) : "We Can't Disagree Forever," *Journal of Economic Theory*, 28, 192–200.

HARSANYI, J. C. (1967–1968) : "Games with Incomplete Information Played by Bayesian Players. Parts I, II, III," *Management Science*, 14, 159–182, 320–334, 486–502.

——— (1973) : "Games with Randomly Disturbed Payoffs : A New Rationale for Mixed Strategy Equilibrium Points," *International Journal of Game Theory*, 2, 1–23.

LEWIS, D. (1969) : *Convention, a Philosophical Study*, Harvard University Press, Cambridge, Mass.

OSBORNE, M. J. ET A. RUBINSTEIN (1994) : *A Course in Game Theory*, Cambridge, Massachusetts : MIT Press.