# Jeux répétés

**Plan**

(23 juillet 2008)

1/
- Définitions : actualisation des gains, rationalité individuelle
- Jeux répétés finis
- Jeux répétés infinis
- Représentation des stratégies par des automates
- Propriété de déviation en un coup
- Folk theorems
- Applications : Dilemme du prisonnier, oligopole de Cournot et collusion

Références :

2/

- Mailath et Samuelson (2006) : *"Repeated Games and Reputations"*
- Osborne (2004) : *"An Introduction to Game Theory"*, chap. 14–15
- Osborne et Rubinstein (1994) : *"A Course in Game Theory"*, chap. 8–9

- Étudier les **interactions de long terme** en considérant un *jeu de base* (simultané) répété entre les mêmes joueurs

  ➥ Incitations qui diffèrent fondamentalement par rapports aux interactions isolées

  ☞ Comportements sophistiqués, normes sociales

  ☞ Menaces, dissuasion, punitions, promesses

  ☞ Possibilités de coopération, amélioration de l'efficience au sens de Pareto ?



**Exemple.**

| | $A$ | $B$ | $C$ |
|---|---|---|---|
| $A$ | $(5,5)$ | $(0,0)$ | $(12,0)$ |
| $B$ | $(0,0)$ | $(2,2)$ | $(0,0)$ |
| $C$ | $(0,12)$ | $(0,0)$ | $(10,10)$ |

Deux EN stricts : $AA$ et $BB$, avec un gain maximal de 5



Si le jeu est joué deux fois, $CC$ à la première étape et $AA$ à la seconde est un résultat d'EN(PSJ), avec un gain moyen supérieur (7.5)

- Deux grandes classes de jeux répétés : *horizon fini* / *horizon infini* image
- Hypothèses ici : "*super-jeu*"

  – Information complète – Observation parfaite et publique des actions passées

  $\Rightarrow$ Jeu à *information presque parfaite*
- Introduction éventuelle d'un *taux d'actualisation*

5/

## Taux d'actualisation

*Préférence pour le présent, impatience* : accorder plus de valeur aux gains présents que futurs

Taux d'actualisation (facteur d'escompte) $\delta \in [0,1]$ : le joueur est indifférent entre recevoir $x$ demain et $\delta\, x$ aujourd'hui ➠ *patience* $\Leftrightarrow$ $\delta$ élevé

Exemple : $\forall\, \delta < 1,\ (1,-1,0,0,\ldots) \succ (0,0,0,0,\ldots)$

6/
- *Gain actualisé total* (valeur présente) d'un flux de gain $x(t)$, $t = 1,2,\ldots,T$ :

$$\sum_{t=1}^{T} \delta^{t-1}\, x(t) = \begin{cases} \sum_{t=1}^{T} x(t) & \text{si } \delta = 1 \\ x(1) & \text{si } \delta = 0 \end{cases}$$

- *Gain actualisé moyen* :

$$\frac{\sum_{t=1}^{T} \delta^{t-1}\, x(t)}{\sum_{t=1}^{T} \delta^{t-1}} = \begin{cases} \sum_{t=1}^{T} \frac{x(t)}{T} & \text{si } \delta = 1 \\ x(1) & \text{si } \delta = 0 \end{cases}$$

- Cas infini ($\delta < 1$) :

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\sum_{t=1}^{T} \delta^{t-1}\, x(t)}{\sum_{t=1}^{T} \delta^{t-1}} = (1-\delta)\sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1}\, x(t)$$
$$= x \text{ si } x(t) = x \text{ pour tout } t$$

Remarque : $(1-\delta)$ est un facteur de normalisation qui permet de comparer les
7/ paiements du jeu d'étape et du jeu répété

- Autres interprétations possibles :
  - le jeu continue à chaque étape (après la première) avec probabilité $\delta$
  - taux d'intérêt $r \Rightarrow \delta = \frac{1}{1+r}$ ($1 + r$ € demain $\sim 1$ € aujourd'hui)

Remarque : Si on définit

$$V_t = (1-\delta)\sum_{s=t}^{\infty} \delta^{s-t}\, x(s)$$

on a

$$V_t = (1-\delta) \underbrace{x(t)}_{\text{paiements courants}} + \delta \underbrace{V_{t+1}}_{\text{paiements de continuation}}$$

8/

## Définitions

- Le niveau de paiement **minmax**, ou **paiement de punition**, du joueur $i$ dans un jeu sous forme normale $G$ est le niveau le plus faible auquel les autres joueurs peuvent le contraindre :

$$v_i = \min_{\sigma_{-i} \in \prod_{j \neq i} \Delta(A_j)} \max_{a_i \in A_i} u_i(a_i, \sigma_{-i})$$

9/ Ainsi, $v_i$ est le paiement le plus faible cohérent avec la rationalité individuelle du joueur $i$

- *Profil de stratégies minmax contre* $i$ : une solution du problème de minimisation ci-dessus

**Remarque.** En général, minmax $\neq$ maxmin dans un jeu à plus de deux joueurs. Dans les jeux à deux joueurs $v_i =$ meilleur niveau d'utilité garanti possible (en stratégies mixtes) pour le joueur $i$

- Un profil de paiements $w = (w_1, \ldots, w_n)$ est (strictement) **individuellement rationnel** si chaque joueur gagne au moins son paiement de punition : pour tout $i \in N$,

$$w_i \geq (>) \min_{\sigma_{-i} \in \prod_{j \neq i} \Delta(A_j)} \max_{a_i \in A_i} u_i(a_i, \sigma_{-i}) \equiv v_i$$

☞ Punition la plus sévère qui peut être infligée à $i$ dans $G$ (sans corrélation des stratégies)

10/ *Explication.* $w_i$ est individuellement rationnel pour le joueur $i$ s'il existe un profil de stratégies $\tau_{-i}$ des autres joueurs (le profil de stratégies minmax contre $i$) qui assure que quoique fasse le joueur $i$, son gain n'est pas plus grand que $w_i$ :

$$w_i \geq \min_{\sigma_{-i} \in \prod_{j \neq i} \Delta(A_j)} \max_{a_i \in A_i} u_i(a_i, \sigma_{-i}) \equiv v_i$$

$$\Leftrightarrow \quad w_i \geq \max_{a_i \in A_i} u_i(a_i, \tau_{-i}) \quad \Leftrightarrow \quad w_i \geq u_i(a_i, \tau_{-i}), \quad \forall\, a_i \in A_i$$

Remarque : Bien entendu, un paiement d'EN est individuellement rationnel

## Jeux répétés à horizon fini

**Définition.** Étant donné un jeu sous forme normale $G = \langle N, (A_i), (u_i)\rangle$, le **jeu répété fini** $G(T, \delta)$ est le jeu sous forme extensive où $G$ est joué en $T$ étapes, où les actions de toutes les étapes passées sont publiquement et parfaitement observées, et où les utilités des joueurs sont les utilités totales (ou moyennes) actualisées au taux $\delta$

11/

- Profil d'actions à l'étape $t$ : $a^t = (a_1^t, \dots, a_n^t) \in A = A_1 \times \dots \times A_n$
- Histoire à l'étape $t$ : $(a^1, a^2, \dots, a^{t-1}) \in A^{t-1} = \underbrace{A \times \dots \times A}_{t-1 \text{ fois}}$
- Stratégie (pure) du joueur $i$ : $s_i = (s_i^1, \dots, s_i^T)$, où $s_i^t : A^{t-1} \to A_i$
- Résultat / trajectoire générée par $s$ : $a^1 = s^1,\ a^2 = s^2(a^1),\ a^3 = s^3(a^1, a^2), \dots$

Unique EN (ENPSJ) du dilemme des prisonniers répété un nombre fini de fois : les deux joueurs dénoncent à toutes les périodes

Particularité du jeu du dilemme des prisonniers : les paiements d'équilibre sont les paiements minmax

12/

**Proposition.** *Si tous les profils de paiements d'équilibre de $G$ coïncident avec le profil de paiements minmax de $G$ alors toutes les trajectoires $(a^1, \dots, a^T)$ d'équilibres de Nash du jeu répété fini sont telles que $a^t$ est un équilibre de Nash de $G$ pour tout $t = 1, \dots, T$.*

**Variante du dilemme des prisonniers.**

| | $D$ | $C$ | $P$ |
|---|---|---|---|
| $D$ | $(1,1)$ | $(3,0)$ | $(-1,-1)$ |
| $C$ | $(0,3)$ | $(2,2)$ | $(-2,-1)$ |
| $P$ | $(-1,-1)$ | $(-1,-2)$ | $(-3,-3)$ |

Unique EN du jeu de base : $(D,D)$

13/ Jeu en deux étapes (sans actualisation) :

– Première étape : $s_i^1 = C$

– Deuxième étape : $s_i^2(a_1^1, a_2^1) = \begin{cases} D & \text{si } (a_1^1, a_2^1) = (C,C) \\ P & \text{sinon.} \end{cases}$ est un équilibre de Nash

**⇒ un équilibre de Nash du jeu répété ne consiste pas nécessairement à répéter les équilibres du jeu de base, même si le jeu de base a un unique EN**


| | $D$ | $C$ | $P$ |
|---|---|---|---|
| $D$ | $(1,1)$ | $(3,0)$ | $(-1,-1)$ |
| $C$ | $(0,3)$ | $(2,2)$ | $(-2,-1)$ |
| $P$ | $(-1,-1)$ | $(-1,-2)$ | $(-3,-3)$ |


Mais l'unique ENPSJ est la défection mutuelle aux deux périodes

14/ **Proposition.** *Si le jeu de base $G$ a un unique équilibre de Nash, alors pour tout $T$ fini et pour tout taux d'actualisation $\delta \in (0,1]$, le jeu répété $G(T,\delta)$ a un unique équilibre de Nash parfait en sous jeu, où l'équilibre de Nash du jeu de base est joué à chaque étape (quelle que soit l'histoire)*

**Émergence de nouveaux comportements à un ENPSJ.**

| | $D$ | $C$ | $P$ |
|---|---|---|---|
| $D$ | $(1,1)$ | $(3,0)$ | $(-1,-1)$ |
| $C$ | $(0,3)$ | $(2,2)$ | $(-2,-1)$ |
| $P$ | $(-1,-1)$ | $(-1,-2)$ | $\boldsymbol{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}$ |

Deux EN en stratégies pures dans le jeu de base : $(D,D)$ et $(P,P)$

Jeu répété deux fois (sans actualisation) :

15/ – Première étape : $s_i^1 = C$

– Deuxième étape : $s_i^2(a_1^1, a_2^1) = \begin{cases} D & \text{si } (a_1^1, a_2^1) = (C,C) \\ P & \text{sinon.} \end{cases}$ est un ENPSJ

**⇒ un équilibre de Nash parfait en sous-jeux du jeu répété ne consiste pas nécessairement à répéter les équilibres du jeu de base**

Mais dans cet exemple les joueurs punissent avec un “mauvais” EN.
“Re-négociation” à la deuxième période si $(C,C)$ n'est pas joué à la première ?

**Exemple sans incitation à la “re-négociation”.**

| | $D$ | $C$ | $M$ | $N$ |
|---|---|---|---|---|
| $D$ | $(1,1)$ | $(3,0)$ | $(0,0)$ | $(-2,0)$ |
| $C$ | $(0,3)$ | $(2,2)$ | $(0,0)$ | $(-2,0)$ |
| $M$ | $(0,-2)$ | $(0,-2)$ | $(2,-1)$ | $(-2,-2)$ |
| $N$ | $(0,0)$ | $(0,0)$ | $(0,0)$ | $(-1,2)$ |

16/

Trois EN en stratégies pures dans le jeu de base :

$$(D,D),\ (M,M),\ \text{et } (N,N)$$

(non Pareto comparables)

| | $D$ | $C$ | $M$ | $N$ |
|---|---|---|---|---|
| $D$ | $(1,1)$ | $(3,0)$ | $(0,0)$ | $(-2,0)$ |
| $C$ | $(0,3)$ | $(2,2)$ | $(0,0)$ | $(-2,0)$ |
| $M$ | $(0,-2)$ | $(0,-2)$ | $(2,-1)$ | $(-2,-2)$ |
| $N$ | $(0,0)$ | $(0,0)$ | $(0,0)$ | $(-1,2)$ |

Un ENPSJ du jeu en deux étapes (sans actualisation) :

– Première étape : $s_i^1 = C$

17/ – Deuxième étape : $s_1^2(a_1^1, a_2^1) = \begin{cases} D & \text{si } (a_1^1, a_2^1) = (C, C) \text{ ou } \{a_1^1 \text{ et } a_2^1 \neq C\} \\ M & \text{si } a_1^1 = C \text{ et } a_2^1 \neq C \\ N & \text{si } a_1^1 \neq C \text{ et } a_2^1 = C \end{cases}$

$$s_2^2(a_1^1, a_2^1) = \begin{cases} D & \text{si } (a_1^1, a_2^1) = (C, C) \text{ ou } \{a_1^1 \text{ et } a_2^1 \neq C\} \\ M & \text{si } a_1^1 = C \text{ et } a_2^1 \neq C \\ N & \text{si } a_1^1 \neq C \text{ et } a_2^1 = C \end{cases}$$

☞ Le joueur qui punit est “rémunéré”

**Exercice.** ✍ Considérons le jeu d'étape suivant.

| | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ |
|---|---|---|---|---|
| $A$ | $(4,4)$ | $(0,0)$ | $(18,0)$ | $(1,1)$ |
| $B$ | $(0,0)$ | $(6,6)$ | $(0,0)$ | $(1,1)$ |
| $C$ | $(0,18)$ | $(0,0)$ | $(13,13)$ | $(1,1)$ |
| $D$ | $(1,1)$ | $(1,1)$ | $(1,1)$ | $(0,0)$ |

18/ (i) Trouver les EN en stratégies pures

(ii) Considérons le jeu répété en deux étapes. Trouver un ENPSJ avec un paiement moyen égal à 3 pour chaque joueur

(iii) Pour voir comment construire des équilibres avec des punitions plus sévères lorsque le nombre d'étapes augmente, considérons le jeu répété en trois étapes. Trouver un ENPSJ avec un paiement moyen égal à $\frac{13+6+6}{3} = 25/3$ pour chaque joueur (astuce : utiliser la stratégie trouver en (ii) pour la punition aux deux dernières étapes)

## Jeux répétés à horizon infini

**Définition.** Étant donné un jeu sous forme normale $G = \langle N, (A_i), (u_i) \rangle$, le **jeu répété infini** $G(\infty, \delta)$ est le jeu sous forme extensive où $G$ est répété indéfiniment, où les actions de toutes les étapes passées sont publiquement et parfaitement observées, et où les utilités des joueurs sont les utilités moyennes actualisées au taux $\delta$

19/

**Définition.** Un profil de paiements $x \in \mathbb{R}^n$ est **réalisable** s'il existe $\rho \in \Delta(A)$ tel que

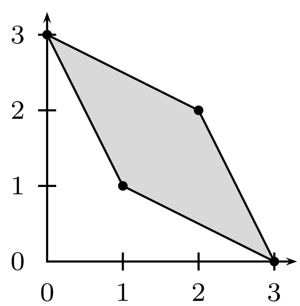
$$x_i = \sum_{a \in A} \rho(a)\, u_i(a), \quad \forall\, i \in N$$

☞ Combinaison convexe, conv$(u(A))$, de tous les paiements possibles du jeu de base

**Exemple.** Paiements réalisables dans le dilemme des prisonniers

| | $D$ | $C$ |
|---|---|---|
| $D$ | $(1,1)$ | $(3,0)$ |
| $C$ | $(0,3)$ | $(2,2)$ |

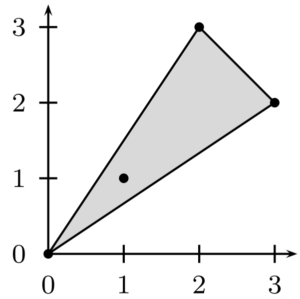
20/



**Exemple.** Paiements réalisables dans la bataille des sexes

| | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| $a$ | $(3,2)$ | $(1,1)$ |
| $b$ | $(0,0)$ | $(2,3)$ |

21/




**Remarque.** L'ensemble de ces paiements réalisables est généralement strictement plus grand que l'ensemble des paiements espérés qui peuvent être obtenus dans le jeu en un coup avec des stratégies mixtes (indépendantes). Par exemple, $(2.5, 2.5)$ n'est pas un paiement espéré associé à un profil de stratégies mixtes

## Stratégies et automates

**Automate** pour $i$ dans le jeu répété infini :

- Ensemble d'états $E_i$

22/

- État initial $e_i^0 \in E_i$
- Fonction output $f_i : E_i \to A_i$
- Fonction de transition des états $\tau_i : E_i \times A \to E_i$

**Remarques.**

– Dans certaines approches (par exemple, dans celles sur la rationalité limitée) on définit la fonction de transition par $\tau_i : E_i \times A_{-i} \to E_i$. Dans ce cas l'action de $i$ ne dépend pas de ses propres actions passées

23/

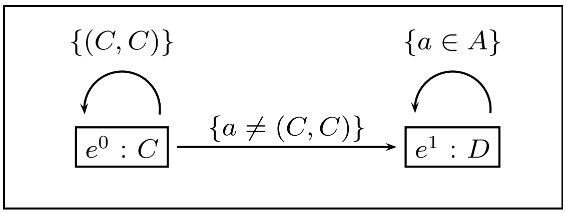
– On caractérise parfois la *complexité d'une stratégie* par la taille (le nombre d'états) du plus petit automate permettant de la représenter

**Exemple.** Dilemme des prisonniers répété infiniment.

Stratégie "*grim*" : Commencer par jouer $C$ puis jouer $C$ ssi les deux joueurs ont toujours joué $C$

- $E = \{e^0, e^1\}$
- $f(e^0) = C$ et $f(e^1) = D$
- $\tau(e, a) = \begin{cases} e^0 & \text{si } e = e^0 \text{ et } a = (C, C) \\ e^1 & \text{sinon} \end{cases}$

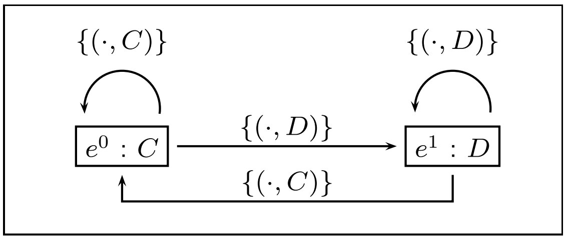
24/



Stratégie "*Tit for Tat*" (donnant-donnant) du joueur 1 : Commencer par jouer $C$ puis jouer $C$ ssi l'autre joueur a joué $C$ à l'étape précédente

- $E = \{e^0, e^1\}$
- $f(e^0) = C$ et $f(e^1) = D$
- $\tau(e, a) = e$ ssi $a = (\cdot, f(e))$

25/




Les deux joueurs jouent "*grim*" ou "*Tit for Tat*" $\Rightarrow$ coopération à toutes les périodes

Étant donné une stratégie $\sigma_i$ du joueur $i$, soit

$$\sigma_i|_{h^t}$$

la *stratégie de continuation* du joueur $i$ induite par l'histoire $h^t \in A^t$

**Définition.** Un profil de stratégies $\sigma$ est un *équilibre de Nash parfait en sous-jeux du jeu répété infini* si pour toutes les histoires $h^t$, $\sigma|_{h^t}$ est un équilibre de Nash du jeu répété

26/ **Définition.** Une *déviation en un coup* du joueur $i$ de la stratégie $\sigma_i$ est une stratégie $\hat{\sigma}_i \neq \sigma_i$ telle qu'il existe une seule histoire $\tilde{h}^t$ pour laquelle, pour tout $h^\tau \neq \tilde{h}^t$,

$$\sigma_i(h^\tau) = \hat{\sigma}_i(h^\tau)$$

Ainsi, une déviation en un coup correspond à la stratégie d'origine après toutes les histoires, sauf à la période après l'histoire $\tilde{h}^t$, où la déviation a lieu

**Exemple.** Considérons la stratégie grim dans le DP infiniment répété

Issue : Les deux joueurs coopèrent à toutes les périodes

Considérons la déviation suivante : stratégie grim, à l'exception d'une dénonciation à la période 4 après l'histoire $(CC, CC, CC, CC)$

Ceci est une déviation en un coup, pourtant l'issue du jeu est différente pour une infinité de périodes (les deux joueurs dénoncent à jamais après la période 4)

27/

**Proposition.** **(La propriété de la déviation en un coup)** *Un profil de stratégies $\sigma$ est un équilibre de Nash parfait en sous-jeux d'un jeu infiniment répété ($\delta$-actualisé) si et seulement si il n'existe pas de déviation en un coup profitable*

Cette propriété s'applique aussi pour les ENPSJ des jeus répétés finis

Mais elle ne s'applique pas pour les équilibres de Nash, comme le montre l'exemple suivant

28/

**Exemple.** Considérons le profil de stratégie Tit for Tat dans le dilemme du prisonnier suivant, donnant un paiement moyen actualisé de 3

| | $D$ | $C$ |
|---|---|---|
| $D$ | $(1,1)$ | $(4,-1)$ |
| $C$ | $(-1,4)$ | $(3,3)$ |

Déviation en un coup du joueur 1 $\Rightarrow$ résultat cyclique $DC$, $CD$, $DC$, $CD$, $\ldots$ donnant un paiement moyen actualisé de

$$\begin{aligned} & (1-\delta)(4(1+\delta^2+\delta^4+\cdots)-1(\delta+\delta^3+\cdots)) \\ = \quad & (1-\delta)(\frac{4}{1-\delta^2}-\frac{\delta}{1-\delta^2}) = \frac{4-\delta}{1+\delta} \end{aligned}$$

La déviation n'est pas profitable si $\frac{4-\delta}{1+\delta} \leq 3$, i.e., $\delta \geq 1/4$

Mais une déviation vers la défection perpétuelle (qui n'est **pas** déviation en un
29/ coup) est profitable quand $(1-\delta)(4+\frac{\delta}{1-\delta}) > 3$, i.e., $\delta < 1/3$

$\Rightarrow$ Pour $\delta \in [1/4, 1/3)$ TFT n'est pas un EN même s'il n'y a pas de déviation en un coup profitable

**Exercice.** ✍ On peut montrer, en utilisant la propriété de déviation en un coup, que TFT n'est pas un ENPSJ du DP infiniment répété précédant quel que soit le taux d'actualisation $\delta$

Conditions pour que "*grim*" pour chaque joueur soit un EN ? On utilise la propriété de déviation en un coup. Période $t$ sur le chemin d'équilibre :

$$\begin{aligned} C &\longrightarrow 3 \\ D &\longrightarrow \ (1-\delta)4+\delta \end{aligned}$$

La déviation vers $D$ n'est pas profitable si

$$\begin{aligned} & 3 \geq (1-\delta)4+\delta \\ \Leftrightarrow \quad & \delta \geq 1/3 \end{aligned}$$

30/

Dans les sous-jeux hors équilibre (i.e., $\exists\ s < t$, $a_1^s$ ou $a_2^s = D$), une déviation n'est jamais profitable

$\Rightarrow$ **un ENPSJ du jeu répété infini ne consiste pas nécessairement à répéter les équilibres du jeu de base, même si le jeu de base a un unique EN**

## "Folk Theorems"

31/

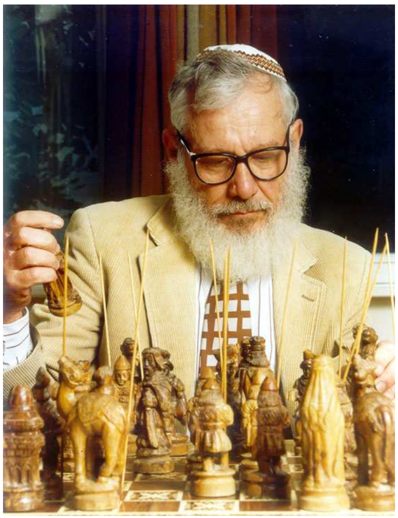


FIG. 1 – Robert Aumann (1930– ), prix Nobel d'économie en 2005

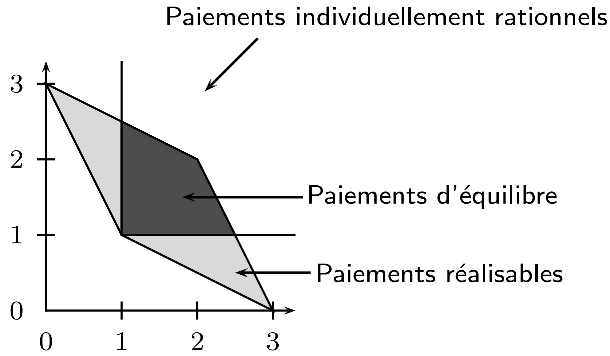
**Proposition.** *Si $(x_1, \ldots, x_n)$ est un profil de paiements réalisable et strictement individuellement rationnel, et si $\delta$ est suffisamment proche de un, alors il existe un équilibre de Nash du jeu répété infini $G(\infty, \delta)$ qui donne un paiement actualisé moyen égal à $(x_1, \ldots, x_n)$.*

☞ Punition du déviant avec la stratégie minmax contre le déviant à toutes les périodes suivantes ("*trigger strategy*")

32/

**Proposition.** *Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ les paiements d'un équilibre de Nash de $G$ et $(x_1, \ldots, x_n)$ un profil de paiements réalisable. Si $x_i > e_i$ pour tout $i$ et si $\delta$ est suffisamment proche de un, alors il existe un équilibre de Nash* **parfait en sous-jeux** *du jeu répété infini $G(\infty, \delta)$ qui donne un paiement actualisé moyen égal à $(x_1, \ldots, x_n)$.*

Exemple : dilemme des prisonniers




33/

Mais le DP est très particulier car le paiement à l'EN du jeu de base = paiement minmax

## Collusion dans un oligopole de Cournot répété

$n$ firmes produisent un bien identique avec un coût marginal constant $c < 1$

Compétition de Cournot : les firmes choisissent simultanément des quantités d'output $q_i \in \mathbb{R}_+$, $i = 1, \ldots, n$

Prix du marché :

$$p = 1 - \sum_{j=1}^{n} q_j$$

34/

Profit de la firme $i$ :

$$u_i(q_1, \ldots, q_n) = q_i(1 - \sum_{j=1}^{n} q_j - c)$$

CPO de la firme $i$ : $1 - \sum_{j \neq i}^{n} q_j - 2q_i^* - c = 0$

$\Rightarrow q_i^* = 1 - \sum_{j=1}^{n} q_j^* - c$ pour tout $i$

$\Rightarrow$ l'équilibre doit être symétrique ($q_i^* = q_i \ \forall\ i$) et $u_i(q_i^*, q_{-i}) = (q_i^*)^2$

$\Rightarrow q^* = 1 - nq^* - c = \frac{1-c}{n+1}$

$\Rightarrow u_i(q^*, \ldots, q^*) = (\frac{1-c}{n+1})^2$

$\Rightarrow$ Prix d'équilibre $p^* = 1 - nq^* = \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1}c$

Quand $n$ augmente, la résultat d'équilibre converge vers le prix de concurrence parfaite (prix $\rightarrow$ coût marginal)

Les quantités totales $\frac{n(1-c)}{n+1}$ augmentent, donc le bien être des consommateurs augmente

35/

Est-ce que des marchés moins concentrés sont toujours plus compétitifs et meilleurs pour le bien être des consommateurs dans le jeu de Cournot répété ?

Pas nécessairement ...

Pour simplifier, posons $c = 0$

**Collusion.** Chaque firme produit $\frac{1}{2n}$ lorsque les autres firmes font de même, et produit $\frac{1}{n+1}$ sinon ($\sim$ stratégie "grim" du DP)

Ainsi, sur le chemin d'équilibre, le prix et les quantités totales valent $1/2$, comme dans le marché monopolistique

Le profit de la firme $i$ est égal à $\frac{1}{2n}\frac{1}{2} = \frac{1}{4n}$. La firme $i$ ne dévie pas si (utiliser la propriété de déviation en un coup)

$$\frac{1}{4n}(1 + \delta + \delta^2 + \cdots) \geq Y_i + (\frac{1}{n+1})^2(\delta + \delta^2 + \cdots)$$

36/

où $Y_i$ est le profit de $i$ lorsque $i$ dévie vers sa stratégie d'étape de meilleure réponse $MR_i(q_{-i}) = \frac{1-\sum_{j\neq i} q_j}{2} = \frac{1-(n-1)/2n}{2} = \frac{n+1}{4n}$, i.e., $Y_i = (\frac{n+1}{4n})^2$

La condition de non-déviation devient

$$\frac{1}{4n(1-\delta)} \geq (\frac{n+1}{4n})^2 + \frac{\delta}{(1-\delta)(n+1)^2}$$

i.e., $\delta \geq \frac{n^2+2n+1}{n^2+6n+1} < 1$

**Conclusion** : À un ENPSJ du jeu de Cournot infiniment répété, les firmes peuvent reproduire la situation de monopole si le taux d'actualisation est suffisamment élevé

**Application des folk theorems au jeu de Cournot.**

➢ Le paiement minmax est égal à 0, donc tout paiement réalisable tel que chaque firme a un profit strictement positif peut être obtenu à un **équilibre de Nash** si les firmes sont suffisamment patientes

➢ Tout paiement réalisable tel que chaque firme gagne strictement plus qu'à l'équilibre de Cournot standard (en une étape) peut être obtenu à un **équilibre de Nash parfait en sous-jeux** si les firmes sont suffisamment patientes



**Remarque.** En fait, le folk theorem pour l'ENPSJ est plus général que dans la proposition, mais utilise des punitions plus compliquées que des équilibres de Nash du jeu d'étape. Ceci n'a pas d'importance dans le DP car l'EN du jeu d'étape est la punition la plus sévère possible. Mais cette propriété n'est pas vrai dans tous les jeux (e.g., dans l'oligopole de Cournot)

## Références

Mailath, G. J. et L. Samuelson (2006) : *Repeated Games and Reputations*, Oxford University Press.

Osborne, M. J. (2004) : *An Introduction to Game Theory*, New York, Oxford : Oxford University Press.

Osborne, M. J. et A. Rubinstein (1994) : *A Course in Game Theory*, Cambridge, Massachusetts : MIT Press.