Négociation : Approche non-coopérative / stratégique

(3 septembre 2007)

Comment partager un gâteau / trouver un accord parmi un ensemble d'arrangements possibles ?

- ☞ Négociations salariales ; partager les revenus générés par la production entre un manager et les travailleurs
- ☞ Partage de surplus entre un acheteur et un vendeur

1/

Situation de négociation :

(i) Les agents ont la possibilité de conclure des *accords mutuellement bénéfiques*
(ii) Il y a un *conflit d'intérêt* sur l'accord à conclure
(iii) Aucun accord ne peut être imposé à un agent sans son approbation

2/

Avant Nash (1950, 1953), seule solution proposée par la théorie économique : L'accord doit être

– individuellement rationnel (i.e., moins mauvais que le désaccord pour chaque joueur)
– Pareto optimal (i.e., il n'existe pas un autre accord préféré par tous les joueurs)

Nash propose deux approches conduisant à des solutions :

3/

❶ L'*approche axiomatique* (coopérative, normative) : quelles propriétés doivent vérifier des solutions admissibles ?

❷ L'*approche stratégique* (non-coopérative) : quelle est la solution étant donné un processus explicite de négociation ?

Ici, Approche ❷ : Représentation du problème de partage à l'aide d'un jeu sous forme extensive (offres alternées, information complète et parfaite)

➥ Structure temporelle et informationnelle, procédures et règles de négociation explicites

On considère deux joueurs, qui négocient pour se partager un "gâteau" homogène, dont la taille est normalisée à 1

Un *partage* est une paire (x_1, x_2), où x_i est la part qui revient au joueur i

Ensemble des *accords* possibles (et Pareto optimaux) :

$$X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 : x_1 + x_2 = 1\}$$

Exemples :

4/

➢ Partage d'un euro : $x_i =$ montant reçu pour le joueur i

➢ Négociation de prix : $x_2 =$ prix payé par l'acheteur (joueur 1) au vendeur (joueur 2)

➢ Négociation de salaire : $x_1 =$ profit de la firme (joueur 1)

Préférences : Le joueur i préfère $x = (x_1, x_2) \in X$ à $y = (y_1, y_2) \in X$ ssi $x_i > y_i$

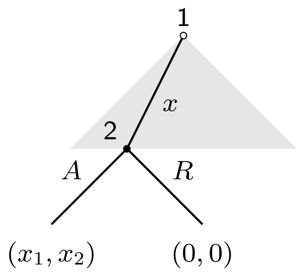
Point de départ : Jeu de l'ultimatum (continu)

Première période : le joueur 1 propose un partage $x = (x_1, x_2) \in X$

Deuxième période : le joueur 2 accepte (A) ou rejette (R) l'offre. S'il accepte, il reçoit x_2 et le joueur 1 reçoit x_1. S'il rejette, ils ont tous les deux 0

Forme extensive :

5/



Vérifier que tout partage est soutenable par un équilibre de Nash

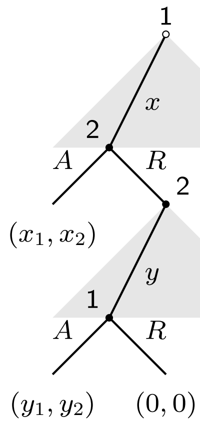
Unique ENPSJ : le joueur 1 propose $(1, 0)$ et le joueur 2 accepte toutes les offres

Problème dans le jeu de l'ultimatum : le **joueur 2 n'a aucun pouvoir de négociation** puisque sa seule alternative à l'acceptation du partage proposé par le joueur 1 est le rejet, qui lui donne une part nulle

Supposons que le joueur 2 puisse faire une contre offre, que le joueur 1 doit finalement accepter ou refuser

6/

7/



Maintenant, c'est le joueur 1 qui n'a plus aucun pouvoir de négociation

Induction à rebours $\Rightarrow$ solution $y = (0, 1)$ et A en deuxième période

$\Rightarrow x = (0, 1)$, ou $x \neq (0, 1)$ et R en première période

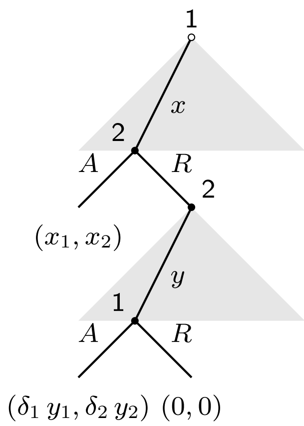
$\Rightarrow$ à tous les ENPSJ le joueur 2 reçoit toute la part du gâteau

Généralisation : par induction à rebours, quelle que soit la durée du jeu, le joueur qui fait la dernière offre de partage reçoit toute la part du gâteau

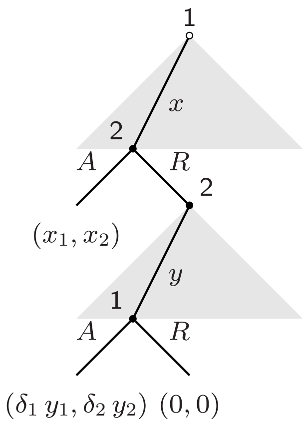
Mais le temps est précieux . . .

Taux d'actualisation $\delta_i \in (0, 1)$ pour le joueur i

8/



9/



Induction à rebours :

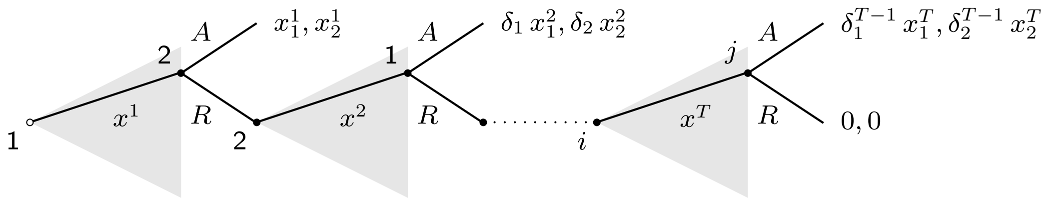
Sous-jeu faisant suite au rejet du joueur 2 : unique ENPSJ, où le joueur 2 propose le partage $(0, 1)$ et le joueur 1 accepte toutes les offres $\Rightarrow$ paiement $(0, \delta_2)$

Sous-jeu faisant suite à la proposition initiale du joueur 1 : le joueur 2 accepte $x_2 \geq \delta_2$ et refuse $x_2 < \delta_2$ $\Rightarrow$ le joueur 1 propose $(x_1, x_2) = (1 - \delta_2, \delta_2)$ en première période

Différence par rapport au cas précédent (sans δ_2) : la menace de rejeter une offre x_2 n'est pas crédible si $x_2 \geq \delta_2$, car le rejet du joueur 2 conduit à un coût d'attente

Négociation à horizon fini

10/



i (j) = joueur 1 si T est impair (pair) $\quad$ i (j) = joueur 2 si T est pair (impair)

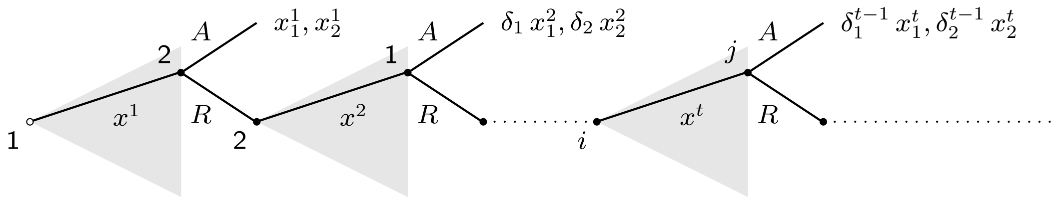
➥ Résolution par induction rétroactive

✍ Vérifier que si $T = 3$ alors $x^1 = (1 - \delta_2(1 - \delta_1), \delta_2(1 - \delta_1))$

✍ Vérifier que si $T = 4$ alors $x^1 = (1 - \delta_2(1 - \delta_1(1 - \delta_2)), \delta_2(1 - \delta_1(1 - \delta_2)))$

Problème : la solution dépend de la borne "artificielle" de négociation

Négociation à horizon infini



11/

i (j) = joueur 1 si t est impair (pair)

i (j) = joueur 2 si t est pair (impair)

Remarques.

- ➢ Ce jeu est infini à deux égards : les choix d'offres à chaque période et le nombre de périodes
- ➢ Chaque sous-jeu commençant par une offre du joueur 1 est équivalent au jeu entier
- ➢ Seule asymétrie en horizon infini : le joueur 1 est le premier à faire une offre

12/

- ➢ On a supposé que les joueurs sont uniquement intéressés par le partage x éventuellement accepté par un des joueurs, et par la période à laquelle l'accord a été conclu (ils sont indifférents à la séquence d'offres passée, n'ont donc jamais de regret, . . .)
- ➢ La structure du jeu est répétitive, mais ce n'est pas un jeu répété (choix de A $\Rightarrow$ fin de la "répétition")

Stratégie (pure) du joueur 1 : Séquence $\sigma = (\sigma^t)_{t=1}^{\infty}$, où

$$\sigma^t : X^{t-1} \to X \quad \text{si } t \text{ est impair}$$
$$\sigma^t : X^{t-1} \to \{A, R\} \quad \text{si } t \text{ est pair}$$

Stratégie (pure) du joueur 2 : Séquence $\tau = (\tau^t)_{t=1}^{\infty}$, où

13/
$$\tau^t : X^{t-1} \to X \quad \text{si } t \text{ est pair}$$
$$\tau^t : X^{t-1} \to \{A, R\} \quad \text{si } t \text{ est impair}$$

Stratégies stationnaires : ne dépendent pas de la période et des offres passées

Joueur 1 :

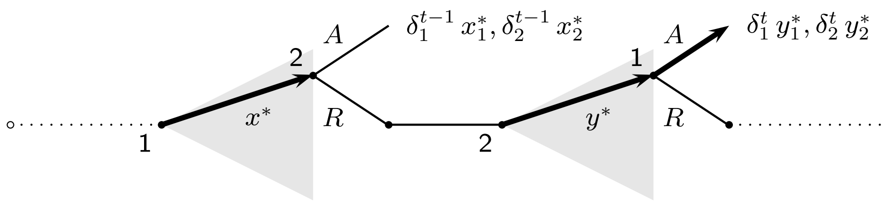
$$\sigma^t(x^{t-1}) = x^* \qquad \text{si } t \text{ est impair}$$
$$\sigma^t(x^{t-1}) = \begin{cases} A & \text{si } x_1^{t-1} \geq \overline{x}_1 \\ R & \text{si } x_1^{t-1} < \overline{x}_1 \end{cases} \qquad \text{si } t \text{ est pair}$$

Joueur 2 :

14/
$$\tau^t(x^{t-1}) = y^* \qquad \text{si } t \text{ est pair}$$
$$\tau^t(x^{t-1}) = \begin{cases} A & \text{si } x_2^{t-1} \geq \overline{y}_2 \\ R & \text{si } x_2^{t-1} < \overline{y}_2 \end{cases} \qquad \text{si } t \text{ est impair}$$

Offres (tout juste) acceptées à l'ENPSJ $\forall\, t$, $\forall\, \delta < 1$ ➠ $y_1^* = \overline{x}_1$ et $x_2^* = \overline{y}_2$

Joueur 2 à la période t (impaire) étant donné ces stratégies :



15/ Équilibre $\Rightarrow$ $\delta_2^{t-1}\,x_2^* = \delta_2^t\,y_2^*$, i.e., $x_2^* = \delta_2\,y_2^*$

Raisonnement symétrique pour le joueur 1 $\Rightarrow$ $y_1^* = \delta_1\,x_1^*$

D'où

$$x^* = \left(\frac{1-\delta_2}{1-\delta_1\delta_2}, \frac{\delta_2(1-\delta_1)}{1-\delta_1\delta_2}\right)$$
$$y^* = \left(\frac{\delta_1(1-\delta_2)}{1-\delta_1\delta_2}, \frac{1-\delta_1}{1-\delta_1\delta_2}\right)$$

✍ Caractériser un équilibre de Nash (stratégies complètes, issues et utilités associées) du jeu qui ne soit pas Pareto optimal. Expliquer pourquoi ce profil de stratégies n'est pas un équilibre de Nash parfait en sous-jeux

Proposition. (Rubinstein, 1982) *Le profil de stratégies stationnaires caractérisé précédemment, i.e.,*

– *Le joueur 1 propose toujours x^* et accepte une proposition x ssi $x_1 \geq y_1^*$*
– *Le joueur 2 propose toujours y^* et accepte une proposition x ssi $x_2 \geq x_2^*$*

où

16/

$$x^* = \left(\frac{1-\delta_2}{1-\delta_1\delta_2}, \frac{\delta_2(1-\delta_1)}{1-\delta_1\delta_2}\right)$$
$$y^* = \left(\frac{\delta_1(1-\delta_2)}{1-\delta_1\delta_2}, \frac{1-\delta_1}{1-\delta_1\delta_2}\right)$$

est l'unique équilibre de Nash parfait en sous-jeux du jeu de négociation avec offres alternées et à information parfaite

Propriétés de l'équilibre.

– *Efficience* au sens de Pareto (pas de délai)
– *Patience* du joueur i augmente ($\delta_i \uparrow$) $\Rightarrow$ part du joueur i augmente
– *Avantage d'être premier* : si $\delta_1 = \delta_2$ le premier joueur reçoit $\frac{1}{1+\delta} > \frac{1}{2}$, mais $\frac{1}{1+\delta} \longrightarrow \frac{1}{2}$ quand $\delta \to 1$

17/ **Remarques.**

➢ Si les offres étaient faites de manière simultanée à chaque période (avec accord ssi compatibilité des offres) alors toute issue Pareto optimale constituerait un ENPSJ

➢ Si un seul joueur pouvait faire les propositions à chaque période alors à un ENPSJ il aurait nécessairement toute la part du gâteau dès la première période

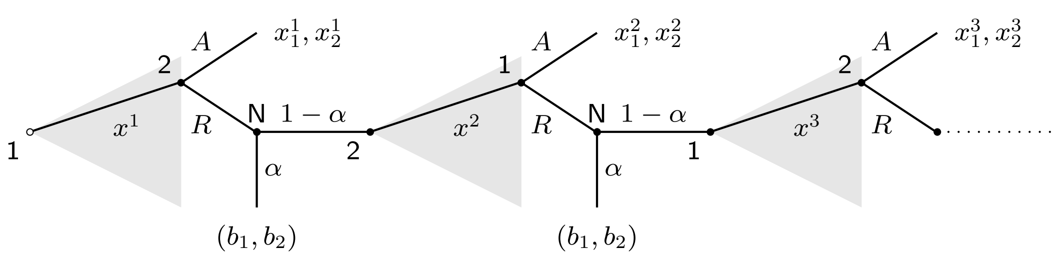
Risque de rupture

Après chaque rejet, risque (exogène) de rupture de négociation avec probabilité $\alpha \in (0,1)$

$\Rightarrow$ Pression à la négociation rapide, même si les joueurs sont patients (supposons $\delta_1 = \delta_2 = 1$)

Paiements en cas de rupture : $(b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2_+$, où $b_1 + b_2 < 1$

18/



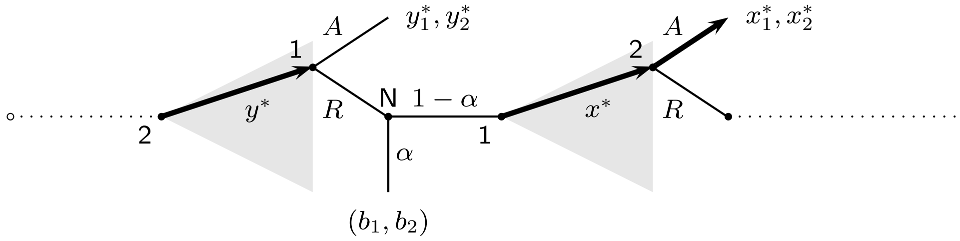
Comme dans le modèle de base, l'unique ENPSJ est un profil de stratégies stationnaires :

– Le joueur 1 propose toujours x^* et accepte une proposition x ssi $x_1 \geq y_1^*$

– Le joueur 2 propose toujours y^* et accepte une proposition x ssi $x_2 \geq x_2^*$

Joueur 1 à une période quelconque étant donné ces stratégies :

19/



Équilibre $\Rightarrow$ $y_1^* = \alpha\, b_1 + (1-\alpha)\, x_1^*$

Raisonnement symétrique pour le joueur 2 $\Rightarrow$ $x_2^* = \alpha\, b_2 + (1-\alpha)\, y_2^*$

D'où

$$x^* = \left(\frac{1-b_2+(1-\alpha)\, b_1}{2-\alpha}, \frac{(1-\alpha)(1-b_1)+b_2}{2-\alpha}\right)$$
$$y^* = \left(\frac{(1-\alpha)(1-b_2)+b_1}{2-\alpha}, \frac{1-b_1+(1-\alpha)\, b_2}{2-\alpha}\right)$$

Allocation lorsque le risque de rupture $\alpha \to 0$:

20/

$$x^* \longrightarrow \left(b_1 + \frac{1-b_1-b_2}{2}, b_2 + \frac{1-b_1-b_2}{2}\right)$$

➥ Chacun reçoit la part qu'il recevrait en cas de rupture (b_i) et la moitié de la part restante ($\frac{1-b_1-b_2}{2}$)

Références

NASH, J. F. (1950) : "Equilibrium Points in n-Person Games," *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 36, 48–49.

——— (1953) : "Two Person Cooperative Games," *Econometrica*, 21, 128–140.

RUBINSTEIN, A. (1982) : "Perfect Equilibrium in a Bargaining Model," *Econometrica*, 50, 97–109.