Jeux coopératifs

Jeux coopératifs

Plan du chapitre

(3 septembre 2007)

Jeux coopératifs

Plan du chapitre
(3 septembre 2007)

– Introduction

Jeux coopératifs

Plan du chapitre

(3 septembre 2007)

– Introduction

– Solution de négociation de Nash

Jeux coopératifs

Plan du chapitre
(3 septembre 2007)

- Introduction
- Solution de négociation de Nash
- Coeur

Jeux coopératifs

Plan du chapitre

(3 septembre 2007)

- Introduction
- Solution de négociation de Nash
- Coeur
- Valeur de Shapley

Introduction

Éléments de base dans les jeux non-coopératifs :

Introduction

Éléments de base dans les jeux non-coopératifs :

– Stratégies des individus

Introduction

Éléments de base dans les jeux non-coopératifs :

– Stratégies des individus

– Issue du jeu $=$ profil de stratégies

Introduction

Éléments de base dans les jeux non-coopératifs :

– Stratégies des individus

– Issue du jeu $=$ profil de stratégies

– Préférences des individus sur les issues

Introduction

Éléments de base dans les jeux non-coopératifs :

- Stratégies des individus
- Issue du jeu $=$ profil de stratégies
- Préférences des individus sur les issues

Éléments de base dans les jeux coopératifs :

Introduction

Éléments de base dans les jeux non-coopératifs :

– Stratégies des individus
– Issue du jeu $=$ profil de stratégies
– Préférences des individus sur les issues

Éléments de base dans les jeux coopératifs :

– Actions jointes des coalitions (groupes d'individus)

Introduction

Éléments de base dans les jeux non-coopératifs :

– Stratégies des individus
– Issue du jeu = profil de stratégies
– Préférences des individus sur les issues

Éléments de base dans les jeux coopératifs :

– Actions jointes des coalitions (groupes d'individus)
  – Grande coalition = coalition formée par tous les joueurs

Introduction

Éléments de base dans les jeux non-coopératifs :

- Stratégies des individus
- Issue du jeu $=$ profil de stratégies
- Préférences des individus sur les issues

Éléments de base dans les jeux coopératifs :

- Actions jointes des coalitions (groupes d'individus)
  - Grande coalition $=$ coalition formée par tous les joueurs
- Issue du jeu $=$ coalitions formées ($\rightarrow$ partition de l'ensemble des joueurs) et actions jointes prises par les coalitions

Introduction

Éléments de base dans les jeux non-coopératifs :

- Stratégies des individus
- Issue du jeu $=$ profil de stratégies
- Préférences des individus sur les issues

Éléments de base dans les jeux coopératifs :

- Actions jointes des coalitions (groupes d'individus)
  - Grande coalition $=$ coalition formée par tous les joueurs
- Issue du jeu $=$ coalitions formées ($\rightarrow$ partition de l'ensemble des joueurs) et actions jointes prises par les coalitions
- Préférences des individus sur les issues (comme dans les jeux non-coopératifs)

Concept de solution dans les jeux coopératifs : à chaque jeu, assigner un ensemble d'issues

Concept de solution dans les jeux coopératifs : à chaque jeu, assigner un ensemble d'issues

➥ stabilité (en général), comme dans les jeux non-coopératifs, mais vis-à-vis des **groupes** de joueurs

Concept de solution dans les jeux coopératifs : à chaque jeu, assigner un ensemble d'issues

➥ stabilité (en général), comme dans les jeux non-coopératifs, mais vis-à-vis des **groupes** de joueurs

Contrairement aux jeux non-coopératifs, pas de détails sur la manière dont les groupes se forment ni sur la manière dont ils prennent leurs décisions

Négociation : Approche coopérative / axiomatique

Négociation : Approche coopérative / axiomatique

➥ Étudier les jeux de négociation (marchandage / partage à deux joueurs) avec l'approche de la théorie des jeux coopératifs

Négociation : Approche coopérative / axiomatique

➥ Étudier les jeux de négociation (marchandage / partage à deux joueurs) avec l'approche de la théorie des jeux coopératifs

☞ Pas de modélisation de la procédure de négociation

Négociation : Approche coopérative / axiomatique

➥ Étudier les jeux de négociation (marchandage / partage à deux joueurs) avec l'approche de la théorie des jeux coopératifs

- ☞ Pas de modélisation de la procédure de négociation
- ☞ Quelles issues ont des propriétés “raisonnables” ?

Négociation : Approche coopérative / axiomatique

➥ Étudier les jeux de négociation (marchandage / partage à deux joueurs) avec l'approche de la théorie des jeux coopératifs

- ☞ Pas de modélisation de la procédure de négociation
- ☞ Quelles issues ont des propriétés "raisonnables" ?
- ☞ Comment varie la solution avec les préférences et les opportunités des joueurs ?

Négociation : Approche coopérative / axiomatique

➥ Étudier les jeux de négociation (marchandage / partage à deux joueurs) avec l'approche de la théorie des jeux coopératifs

- ☞ Pas de modélisation de la procédure de négociation
- ☞ Quelles issues ont des propriétés “raisonnables” ?
- ☞ Comment varie la solution avec les préférences et les opportunités des joueurs ?

➥ Définition de la solution de Nash, caractérisation axiomatique, et liens avec l'approche stratégique (offres alternées)

Négociation : Approche coopérative / axiomatique

➥ Étudier les jeux de négociation (marchandage / partage à deux joueurs) avec l'approche de la théorie des jeux coopératifs

- ☞ Pas de modélisation de la procédure de négociation
- ☞ Quelles issues ont des propriétés “raisonnables” ?
- ☞ Comment varie la solution avec les préférences et les opportunités des joueurs ?

➥ Définition de la solution de Nash, caractérisation axiomatique, et liens avec l'approche stratégique (offres alternées)

X : ensemble des partages possibles / réalisables

Négociation : Approche coopérative / axiomatique

➥ Étudier les jeux de négociation (marchandage / partage à deux joueurs) avec l'approche de la théorie des jeux coopératifs

- ☞ Pas de modélisation de la procédure de négociation
- ☞ Quelles issues ont des propriétés “raisonnables” ?
- ☞ Comment varie la solution avec les préférences et les opportunités des joueurs ?

➥ Définition de la solution de Nash, caractérisation axiomatique, et liens avec l'approche stratégique (offres alternées)

X : ensemble des partages possibles / réalisables
D : issue de désaccord

Négociation : Approche coopérative / axiomatique

➥ Étudier les jeux de négociation (marchandage / partage à deux joueurs) avec l'approche de la théorie des jeux coopératifs

- ☞ Pas de modélisation de la procédure de négociation
- ☞ Quelles issues ont des propriétés “raisonnables” ?
- ☞ Comment varie la solution avec les préférences et les opportunités des joueurs ?

➥ Définition de la solution de Nash, caractérisation axiomatique, et liens avec l'approche stratégique (offres alternées)

X : ensemble des partages possibles / réalisables
D : issue de désaccord
$u_i : X \cup \{D\} \to \mathbb{R}$: fonction d'utilité du joueur i

Négociation : Approche coopérative / axiomatique

➥ Étudier les jeux de négociation (marchandage / partage à deux joueurs) avec l'approche de la théorie des jeux coopératifs

☞ Pas de modélisation de la procédure de négociation

☞ Quelles issues ont des propriétés “raisonnables” ?

☞ Comment varie la solution avec les préférences et les opportunités des joueurs ?

➥ Définition de la solution de Nash, caractérisation axiomatique, et liens avec l'approche stratégique (offres alternées)

X : ensemble des partages possibles / réalisables

D : issue de désaccord

$u_i : X \cup \{D\} \to \mathbb{R}$: fonction d'utilité du joueur i

$\mathcal{U} = \{(v_1, v_2) = (u_1(x), u_2(x)) : x \in X\}$: paires de paiements (utilités) possibles

Négociation : Approche coopérative / axiomatique

➥ Étudier les jeux de négociation (marchandage / partage à deux joueurs) avec l'approche de la théorie des jeux coopératifs

☞ Pas de modélisation de la procédure de négociation

☞ Quelles issues ont des propriétés "raisonnables" ?

☞ Comment varie la solution avec les préférences et les opportunités des joueurs ?

➥ Définition de la solution de Nash, caractérisation axiomatique, et liens avec l'approche stratégique (offres alternées)

X : ensemble des partages possibles / réalisables

D : issue de désaccord

$u_i : X \cup \{D\} \to \mathbb{R}$: fonction d'utilité du joueur i

$\mathcal{U} = \{(v_1, v_2) = (u_1(x), u_2(x)) : x \in X\}$: paires de paiements (utilités) possibles

$d = (u_1(D), u_2(D))$: paiements (utilités) de désaccord

Définition. Un problème de négociation ou de marchandage est une paire $(\mathcal{U}, d)$, où $\mathcal{U}$ est l'ensemble des paires de paiements possibles, $d = (d_1, d_2)$ est la paire de paiement de désaccord, telle que :

Définition. Un problème de négociation ou de marchandage est une paire $(\mathcal{U}, d)$, où $\mathcal{U}$ est l'ensemble des paires de paiements possibles, $d = (d_1, d_2)$ est la paire de paiement de désaccord, telle que :

(i) $d \in \mathcal{U}$

Définition. Un problème de négociation ou de marchandage est une paire $(\mathcal{U}, d)$, où $\mathcal{U}$ est l'ensemble des paires de paiements possibles, $d = (d_1, d_2)$ est la paire de paiement de désaccord, telle que :

(i) $d \in \mathcal{U}$
(ii) Il existe $(v_1, v_2) \in \mathcal{U}$ t. q. $v_1 > d_1$ et $v_2 > d_2$

Définition. Un problème de négociation ou de marchandage est une paire $(\mathcal{U}, d)$, où $\mathcal{U}$ est l'ensemble des paires de paiements possibles, $d = (d_1, d_2)$ est la paire de paiement de désaccord, telle que :

(i) $d \in \mathcal{U}$

(ii) Il existe $(v_1, v_2) \in \mathcal{U}$ t. q. $v_1 > d_1$ et $v_2 > d_2$

(iii) L'ensemble $\mathcal{U}$ est compact (fermé et borné) et convexe

Définition. Un problème de négociation ou de marchandage est une paire $(\mathcal{U}, d)$, où $\mathcal{U}$ est l'ensemble des paires de paiements possibles, $d = (d_1, d_2)$ est la paire de paiement de désaccord, telle que :

(i) $d \in \mathcal{U}$

(ii) Il existe $(v_1, v_2) \in \mathcal{U}$ t. q. $v_1 > d_1$ et $v_2 > d_2$

(iii) L'ensemble $\mathcal{U}$ est compact (fermé et borné) et convexe

Exemple. Économie d'échange. Point de désaccord $\sim$ dotations initiales

Définition. Un problème de négociation ou de marchandage est une paire $(\mathcal{U}, d)$, où $\mathcal{U}$ est l'ensemble des paires de paiements possibles, $d = (d_1, d_2)$ est la paire de paiement de désaccord, telle que :

(i) $d \in \mathcal{U}$

(ii) Il existe $(v_1, v_2) \in \mathcal{U}$ t. q. $v_1 > d_1$ et $v_2 > d_2$

(iii) L'ensemble $\mathcal{U}$ est compact (fermé et borné) et convexe

Exemple. Économie d'échange. Point de désaccord $\sim$ dotations initiales

Remarque. Le paiement de désaccord d n'est pas Pareto optimal d'après (ii)

Définition. Un problème de négociation ou de marchandage est une paire $(\mathcal{U}, d)$, où $\mathcal{U}$ est l'ensemble des paires de paiements possibles, $d = (d_1, d_2)$ est la paire de paiement de désaccord, telle que :

(i) $d \in \mathcal{U}$

(ii) Il existe $(v_1, v_2) \in \mathcal{U}$ t. q. $v_1 > d_1$ et $v_2 > d_2$

(iii) L'ensemble $\mathcal{U}$ est compact (fermé et borné) et convexe

Exemple. Économie d'échange. Point de désaccord $\sim$ dotations initiales

Remarque. Le paiement de désaccord d n'est pas Pareto optimal d'après (ii)

Définition. Une solution de négociation est une fonction ψ qui associe à tout problème de négociation $(\mathcal{U}, d)$ un élément unique $\psi(\mathcal{U}, d)$ de $\mathcal{U}$

Axiomes

Axiomes

➥ Propriétés souhaitables d'une solution de négociation

$$\psi(\mathcal{U}, d) = (\psi_1(\mathcal{U}, d), \psi_2(\mathcal{U}, d)) \in \mathcal{U}$$

Axiomes

- Propriétés souhaitables d'une solution de négociation

$$\psi(\mathcal{U}, d) = (\psi_1(\mathcal{U}, d), \psi_2(\mathcal{U}, d)) \in \mathcal{U}$$

Remarque. Axiome implicite : **existence** et **unicité** du partage $\psi(\mathcal{U}, d)$ pour tout $(\mathcal{U}, d)$

Axiomes

➥ Propriétés souhaitables d'une solution de négociation

$$\psi(\mathcal{U}, d) = (\psi_1(\mathcal{U}, d), \psi_2(\mathcal{U}, d)) \in \mathcal{U}$$

Remarque. Axiome implicite : **existence** et **unicité** du partage $\psi(\mathcal{U}, d)$ pour tout $(\mathcal{U}, d)$

❖ **Pareto optimalité (PAR).** Pour tout problème de négociation $(\mathcal{U}, d)$, la solution de négociation $\psi(\mathcal{U}, d)$ n'est dominée par aucune paire (v_1, v_2) de $\mathcal{U}$:
$\nexists\ (v_1, v_2) \in \mathcal{U}$ t.q. $v_i \geq \psi_i(\mathcal{U}, d)$, $i = 1,\ 2$, avec une inégalité stricte au moins

Axiomes

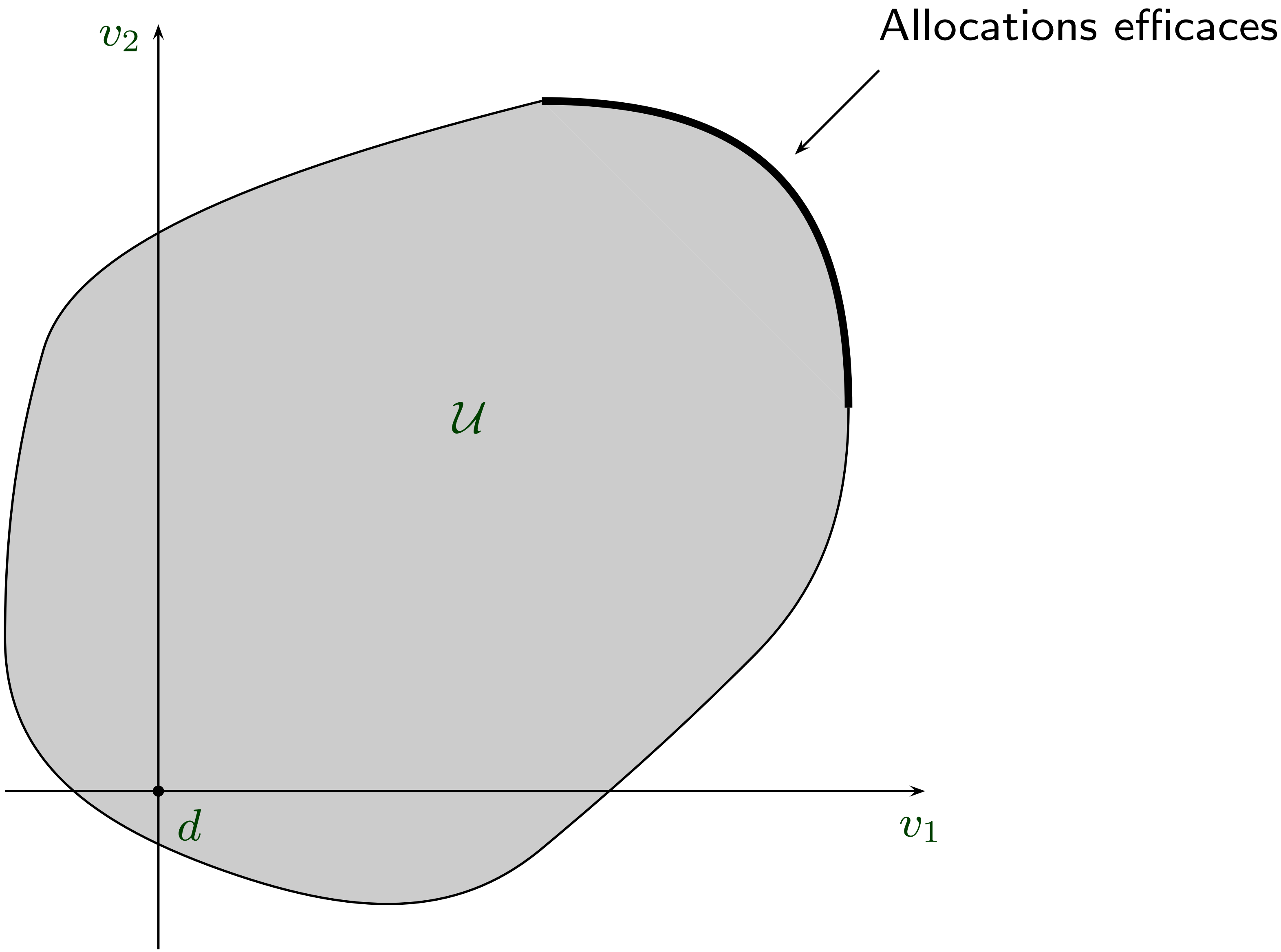
➥ Propriétés souhaitables d'une solution de négociation

$$\psi(\mathcal{U}, d) = (\psi_1(\mathcal{U}, d), \psi_2(\mathcal{U}, d)) \in \mathcal{U}$$

Remarque. Axiome implicite : **existence** et **unicité** du partage $\psi(\mathcal{U}, d)$ pour tout $(\mathcal{U}, d)$

❖ **Pareto optimalité (PAR).** Pour tout problème de négociation $(\mathcal{U}, d)$, la solution de négociation $\psi(\mathcal{U}, d)$ n'est dominée par aucune paire (v_1, v_2) de $\mathcal{U}$:
$\nexists \ (v_1, v_2) \in \mathcal{U}$ t.q. $v_i \geq \psi_i(\mathcal{U}, d)$, $i = 1,\ 2$, avec une inégalité stricte au moins

➥ Pas de possibilité de renégociation qui arrangerait les deux joueurs


Allocations efficaces
v_2
$\mathcal{U}$
d
v_1

✧ **Symétrie (SYM).** ("Équité") Si le problème de négociation $(\mathcal{U}, d)$ est symétrique, i.e., $(v_1, v_2) \in \mathcal{U} \Leftrightarrow (v_2, v_1) \in \mathcal{U}$ (la droite de 45° est un axe de symétrie pour $\mathcal{U}$) et $d_1 = d_2$, alors la solution de négociation donne le même paiement aux deux joueurs : $\psi_1(\mathcal{U}, d) = \psi_2(\mathcal{U}, d)$

❖ **Symétrie (SYM).** ("Équité") Si le problème de négociation $(\mathcal{U}, d)$ est symétrique, i.e., $(v_1, v_2) \in \mathcal{U} \Leftrightarrow (v_2, v_1) \in \mathcal{U}$ (la droite de 45° est un axe de symétrie pour $\mathcal{U}$) et $d_1 = d_2$, alors la solution de négociation donne le même paiement aux deux joueurs : $\psi_1(\mathcal{U}, d) = \psi_2(\mathcal{U}, d)$

➥ Ces deux axiomes déterminent immédiatement une solution unique pour les jeux symétriques

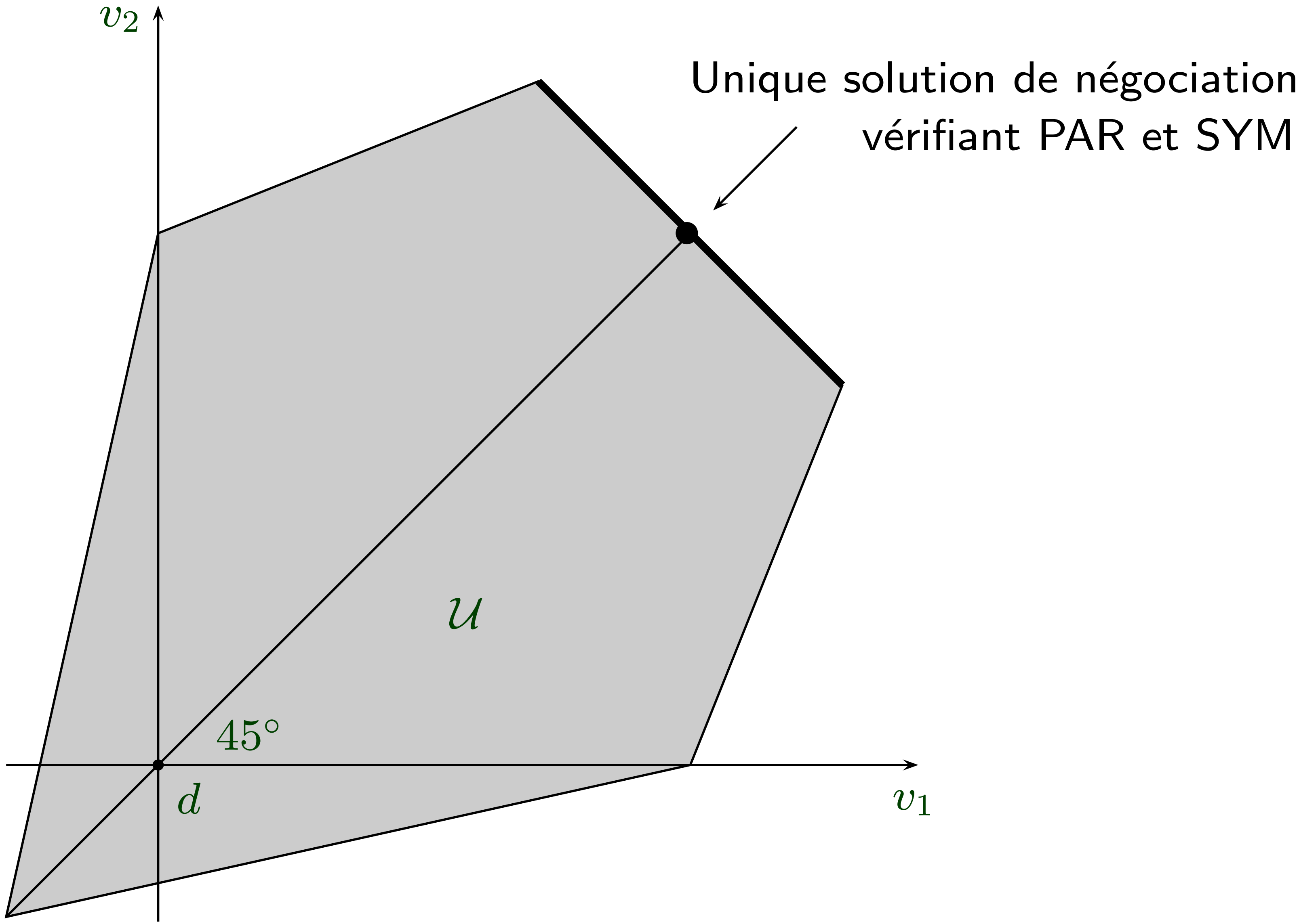

v_2
Unique solution de négociation
vérifiant PAR et SYM
$\mathcal{U}$
$45°$
d
v_1

FIG. 1 –

✤ **Invariance par rapport aux représentations équivalentes des utilités (INV).** Si le problème de négociation $(\mathcal{U}', d')$ est dérivé du problème de négociation $(\mathcal{U}, d)$ par des transformations affines croissantes ($v_i' = \alpha_i\, v_i + \beta_i$ et $d_i' = \alpha_i\, d_i + \beta_i$, $i = 1,\, 2$, $\alpha_i > 0$), alors la solution au problème de négociation transformé pour i est la transformée de la solution du problème original :

$$\psi_i(\mathcal{U}', d') = \alpha_i\, \psi_i(\mathcal{U}, d) + \beta_i \quad (i = 1,\, 2)$$

❖ **Invariance par rapport aux représentations équivalentes des utilités (INV).** Si le problème de négociation $(\mathcal{U}', d')$ est dérivé du problème de négociation $(\mathcal{U}, d)$ par des transformations affines croissantes ($v_i' = \alpha_i\, v_i + \beta_i$ et $d_i' = \alpha_i\, d_i + \beta_i$, $i = 1,\, 2$, $\alpha_i > 0$), alors la solution au problème de négociation transformé pour i est la transformée de la solution du problème original :

$$\psi_i(\mathcal{U}', d') = \alpha_i\, \psi_i(\mathcal{U}, d) + \beta_i \quad (i = 1,\, 2)$$

➥ Cohérence avec le fait que l'utilité espérée est une représentation cardinale des préférences

➥ Sans perte de généralité, on peut toujours se ramener au cas où $d = (0, 0)$

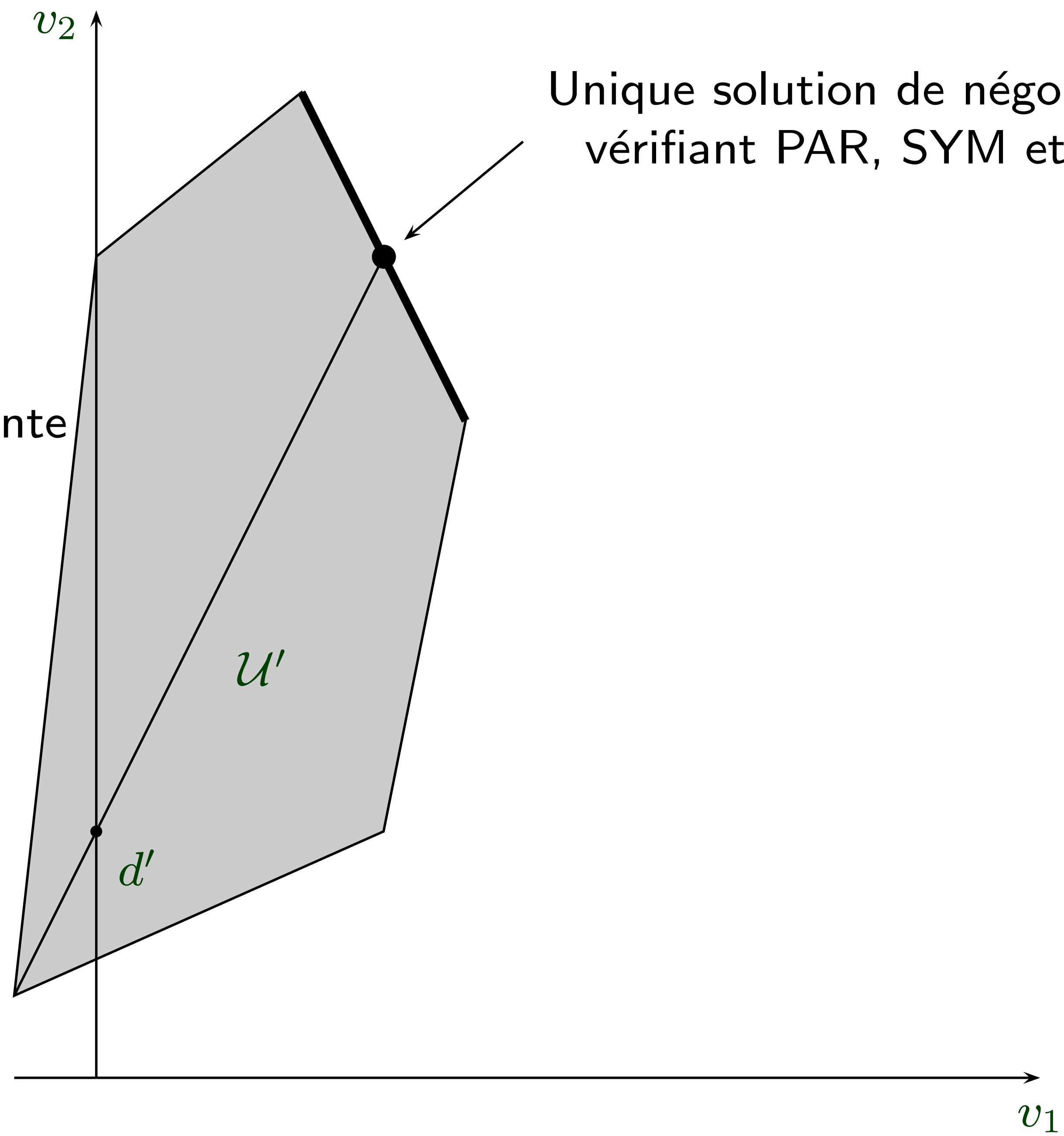
✦ **Invariance par rapport aux représentations équivalentes des utilités (INV).** Si le problème de négociation $(\mathcal{U}', d')$ est dérivé du problème de négociation $(\mathcal{U}, d)$ par des transformations affines croissantes ($v_i' = \alpha_i\, v_i + \beta_i$ et $d_i' = \alpha_i\, d_i + \beta_i$, $i = 1,\, 2$, $\alpha_i > 0$), alors la solution au problème de négociation transformé pour i est la transformée de la solution du problème original :

$$\psi_i(\mathcal{U}', d') = \alpha_i\, \psi_i(\mathcal{U}, d) + \beta_i \quad (i = 1,\, 2)$$

➥ Cohérence avec le fait que l'utilité espérée est une représentation cardinale des préférences

➥ Sans perte de généralité, on peut toujours se ramener au cas où $d = (0, 0)$

$\Rightarrow$ Avec ces trois premiers axiomes une solution de négociation est définie de manière unique pour les problèmes de négociations obtenus par transformation linéaire des utilités à partir d'un problème de négociation symétrique



Unique solution de négociation vérifiant PAR, SYM et INV

Transformation affine croissante du problème de la figure 1

$$v'_1 = \frac{1}{2}\, v_1$$

$$v'_2 = v_2 + 30$$

Mais tous les problèmes de négociation ne peuvent être obtenus à partir de problèmes symétriques par des transformations linéaires des paiements des joueurs

Mais tous les problèmes de négociation ne peuvent être obtenus à partir de problèmes symétriques par des transformations linéaires des paiements des joueurs

$\Rightarrow$ Un dernier axiome est nécessaire

Mais tous les problèmes de négociation ne peuvent être obtenus à partir de problèmes symétriques par des transformations linéaires des paiements des joueurs

$\Rightarrow$ Un dernier axiome est nécessaire

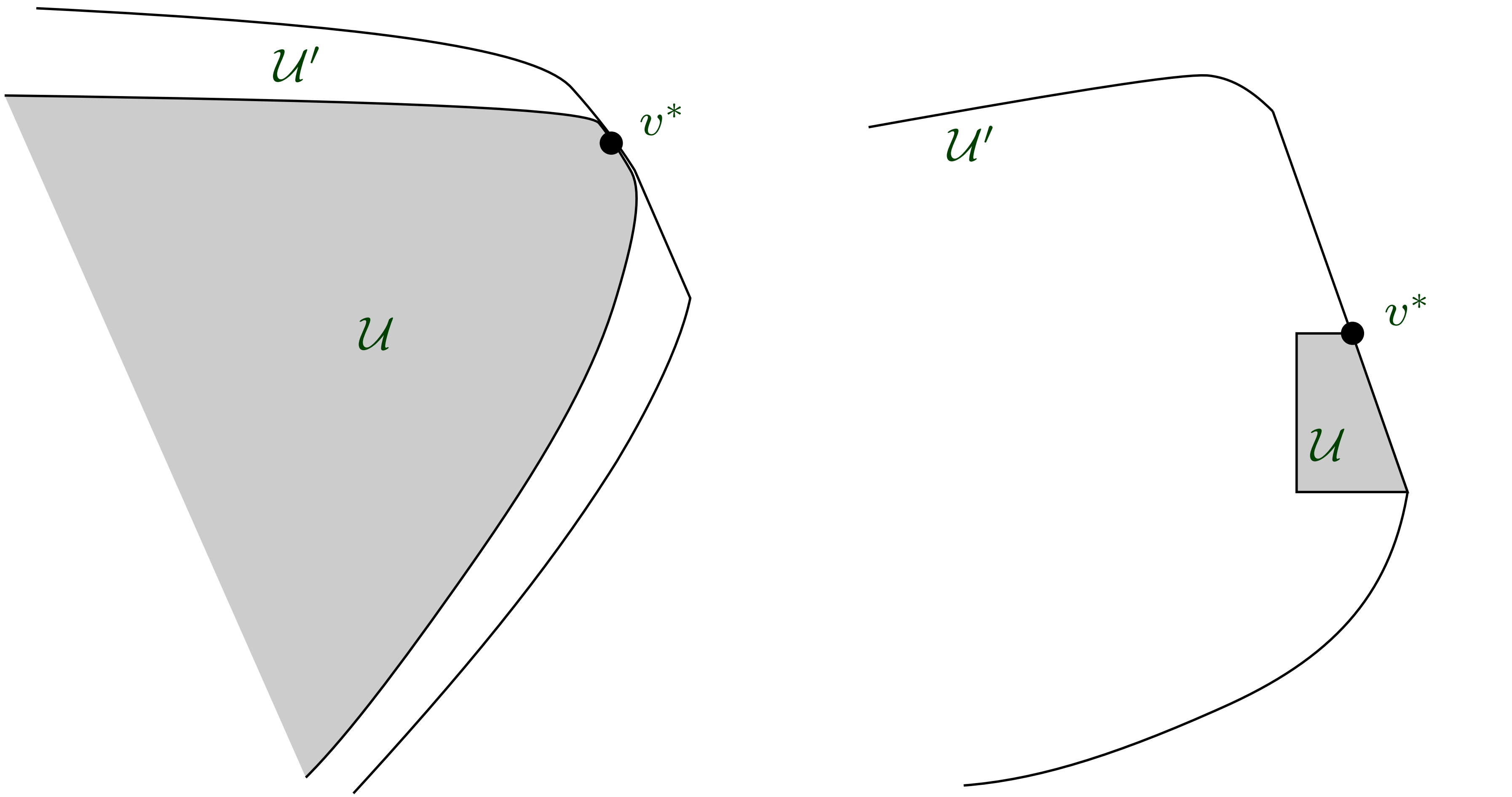
❖ **Indépendance par rapport aux alternatives non pertinentes (IIA).** (invariance par rapport à la contraction) Si deux problèmes de négociation $(\mathcal{U}, d)$ et $(\mathcal{U}', d)$ avec le même point de désaccord sont tels que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}'$ et $\psi(\mathcal{U}', d) \in \mathcal{U}$ alors $\psi(\mathcal{U}, d) = \psi(\mathcal{U}', d)$

Mais tous les problèmes de négociation ne peuvent être obtenus à partir de problèmes symétriques par des transformations linéaires des paiements des joueurs

$\Rightarrow$ Un dernier axiome est nécessaire

❖ **Indépendance par rapport aux alternatives non pertinentes (IIA).** (invariance par rapport à la contraction) Si deux problèmes de négociation $(\mathcal{U}, d)$ et $(\mathcal{U}', d)$ avec le même point de désaccord sont tels que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}'$ et $\psi(\mathcal{U}', d) \in \mathcal{U}$ alors $\psi(\mathcal{U}, d) = \psi(\mathcal{U}', d)$

Remarque. Si la solution ψ s'obtient en maximisant une fonction sur l'ensemble des utilités possibles alors cette propriété est satisfaite



Si $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}'$ et $\psi(\mathcal{U}', d) = v^* \in \mathcal{U}$ alors $\psi(\mathcal{U}, d) = v^*$

Proposition. (Théorème de Nash) *Il existe une et une seule solution de négociation vérifiant les 4 axiomes précédents (PAR, SYM, INV et IIA). C'est la* **solution de négociation de Nash**, *qui assigne à tout problème de négociation* $(\mathcal{U}, d)$ *la paire de paiements qui maximise le* *produit de Nash :*

$$\max_{v} \ (v_1 - d_1)(v_2 - d_2) \quad \text{s.c.} \quad v \in \mathcal{U} \ \text{ et } \ v \geq d$$

Proposition. (Théorème de Nash) *Il existe une et une seule solution de négociation vérifiant les 4 axiomes précédents (PAR, SYM, INV et IIA). C'est la* **solution de négociation de Nash**, *qui assigne à tout problème de négociation* $(\mathcal{U}, d)$ *la paire de paiements qui maximise le produit de Nash :*

$$\max_{v} \,(v_1 - d_1)(v_2 - d_2) \quad \textit{s.c.} \quad v \in \mathcal{U} \;\; \textit{et} \;\; v \geq d$$

✍ Vérifier que la solution de Nash satisfait bien les 4 axiomes ($\Rightarrow$ existence)

Proposition. (Théorème de Nash) *Il existe une et une seule solution de négociation vérifiant les 4 axiomes précédents (PAR, SYM, INV et IIA). C'est la* **solution de négociation de Nash***, qui assigne à tout problème de négociation* $(\mathcal{U}, d)$ *la paire de paiements qui maximise le produit de Nash :*

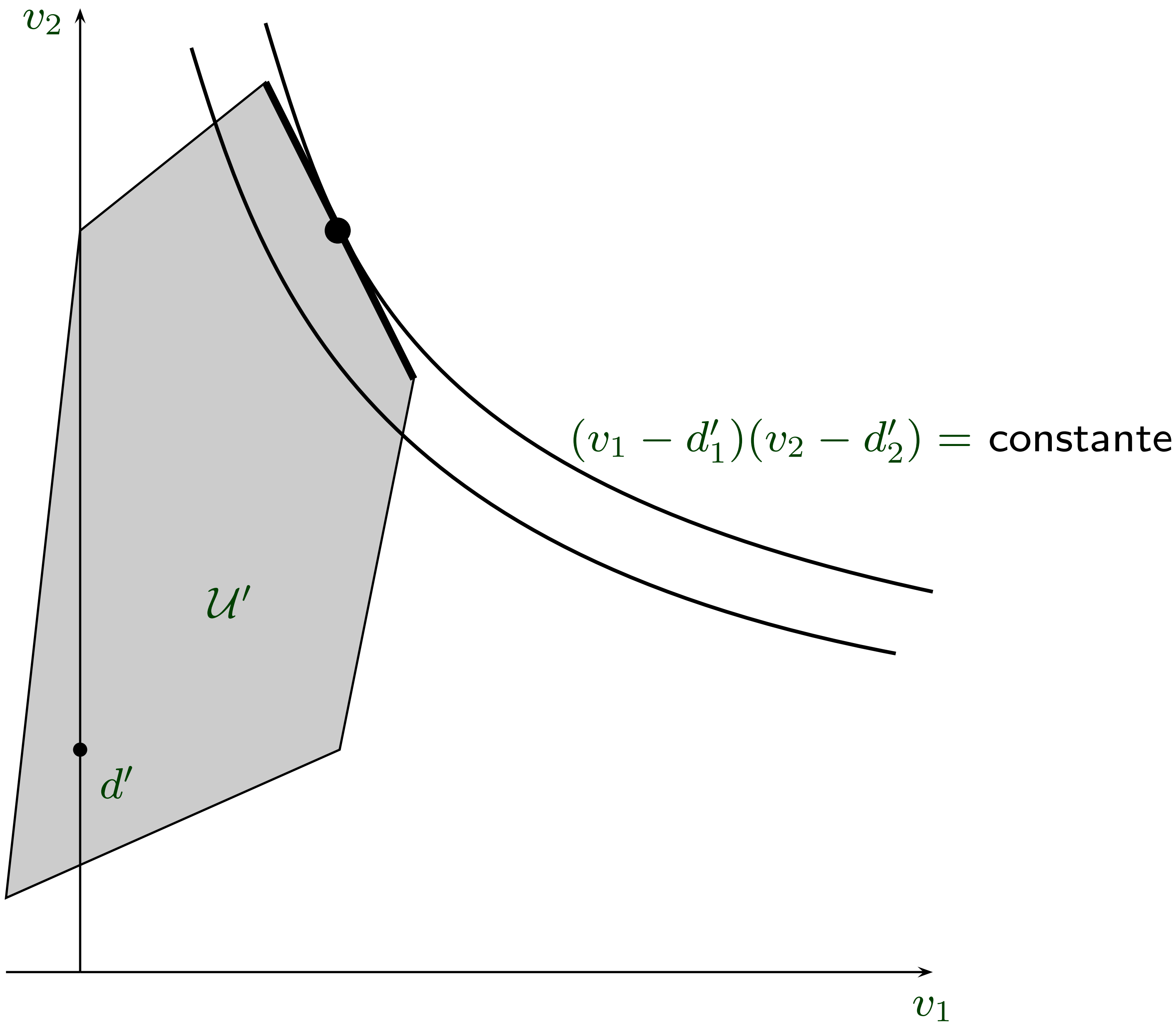
$$\max_{v} \ (v_1 - d_1)(v_2 - d_2) \quad \textit{s.c.} \quad v \in \mathcal{U} \ \ \textit{et} \ \ v \geq d$$

✍ Vérifier que la solution de Nash satisfait bien les 4 axiomes ($\Rightarrow$ existence)

Pour toute valeur c, l'ensemble des paires de paiements (v_1, v_2) telles que

$$(v_1 - d_1)(v_2 - d_2) = c$$

est une hyperbole équilatère $\Rightarrow$ la solution de Nash est la paire (v_1, v_2) appartenant à $\mathcal{U}$ qui est sur la plus haute de ces hyperboles


v_2
$(v_1 - d'_1)(v_2 - d'_2) =$ constante
$\mathcal{U}'$
d'
v_1

Intuition pour la démonstration de l'unicité.

Intuition pour la démonstration de l'unicité.

Soit $\psi^N(\mathcal{U}, d) = v^N$ la solution de Nash et $\psi^*(\mathcal{U}, d)$ une solution satisfaisant les 4 axiomes. On démontre que $\psi^N = \psi^*$

Intuition pour la démonstration de l'unicité.

Soit $\psi^N(\mathcal{U}, d) = v^N$ la solution de Nash et $\psi^*(\mathcal{U}, d)$ une solution satisfaisant les 4 axiomes. On démontre que $\psi^N = \psi^*$

$\boxed{\text{INV}}$ $\Rightarrow$ on peut supposer sans perte de généralité $d = (0, 0)$ et $v^N = (1, 1)$ (changement d'échelle $\rightarrow \frac{v_i - d_i}{v_i^N - d_i}$)

Intuition pour la démonstration de l'unicité.

Soit $\psi^N(\mathcal{U}, d) = v^N$ la solution de Nash et $\psi^*(\mathcal{U}, d)$ une solution satisfaisant les 4 axiomes. On démontre que $\psi^N = \psi^*$

$\boxed{\text{INV}}$ $\Rightarrow$ on peut supposer sans perte de généralité $d = (0, 0)$ et $v^N = (1, 1)$ (changement d'échelle $\rightarrow \frac{v_i - d_i}{v_i^N - d_i}$)

v^N est solution de $\max_{v \in \mathcal{U}} (v_1 \cdot v_2) \Rightarrow v^N$ tangente à $v_1 \cdot v_2 = 1$. Équation de la tangente : $v_1 + v_2 = 2$

Intuition pour la démonstration de l'unicité.

Soit $\psi^N(\mathcal{U}, d) = v^N$ la solution de Nash et $\psi^*(\mathcal{U}, d)$ une solution satisfaisant les 4 axiomes. On démontre que $\psi^N = \psi^*$

$\boxed{\text{INV}}$ $\Rightarrow$ on peut supposer sans perte de généralité $d = (0, 0)$ et $v^N = (1, 1)$ (changement d'échelle $\rightarrow \frac{v_i - d_i}{v_i^N - d_i}$)

v^N est solution de $\max_{v \in \mathcal{U}} (v_1 \cdot v_2) \Rightarrow v^N$ tangente à $v_1 \cdot v_2 = 1$. Équation de la tangente : $v_1 + v_2 = 2$

$\mathcal{U}$ convexe $\Rightarrow \mathcal{U}$ est en dessous de cette tangente

Intuition pour la démonstration de l'unicité.

Soit $\psi^N(\mathcal{U}, d) = v^N$ la solution de Nash et $\psi^*(\mathcal{U}, d)$ une solution satisfaisant les 4 axiomes. On démontre que $\psi^N = \psi^*$

$\boxed{\text{INV}}$ $\Rightarrow$ on peut supposer sans perte de généralité $d = (0, 0)$ et $v^N = (1, 1)$ (changement d'échelle $\rightarrow \frac{v_i - d_i}{v_i^N - d_i}$)

v^N est solution de $\max_{v \in \mathcal{U}} (v_1 \cdot v_2) \Rightarrow v^N$ tangente à $v_1 \cdot v_2 = 1$. Équation de la tangente : $v_1 + v_2 = 2$

$\mathcal{U}$ convexe $\Rightarrow \mathcal{U}$ est en dessous de cette tangente

$\Rightarrow$ on peut inclure $\mathcal{U}$ dans un grand rectangle symétrique $\mathcal{U}'$ (voir figure)

Intuition pour la démonstration de l'unicité.

Soit $\psi^N(\mathcal{U}, d) = v^N$ la solution de Nash et $\psi^*(\mathcal{U}, d)$ une solution satisfaisant les 4 axiomes. On démontre que $\psi^N = \psi^*$

$\boxed{\text{INV}}$ $\Rightarrow$ on peut supposer sans perte de généralité $d = (0, 0)$ et $v^N = (1, 1)$ (changement d'échelle $\rightarrow \frac{v_i - d_i}{v_i^N - d_i}$)

v^N est solution de $\max_{v \in \mathcal{U}} (v_1 \cdot v_2) \Rightarrow v^N$ tangente à $v_1 \cdot v_2 = 1$. Équation de la tangente : $v_1 + v_2 = 2$

$\mathcal{U}$ convexe $\Rightarrow \mathcal{U}$ est en dessous de cette tangente

$\Rightarrow$ on peut inclure $\mathcal{U}$ dans un grand rectangle symétrique $\mathcal{U}'$ (voir figure)

$\boxed{\text{PAR}}$, $\boxed{\text{SYM}}$ $\Rightarrow \psi^*(\mathcal{U}', d) = v^N$

Intuition pour la démonstration de l'unicité.

Soit $\psi^N(\mathcal{U}, d) = v^N$ la solution de Nash et $\psi^*(\mathcal{U}, d)$ une solution satisfaisant les 4 axiomes. On démontre que $\psi^N = \psi^*$

$\boxed{\text{INV}}$ $\Rightarrow$ on peut supposer sans perte de généralité $d = (0, 0)$ et $v^N = (1, 1)$ (changement d'échelle $\rightarrow \frac{v_i - d_i}{v_i^N - d_i}$)

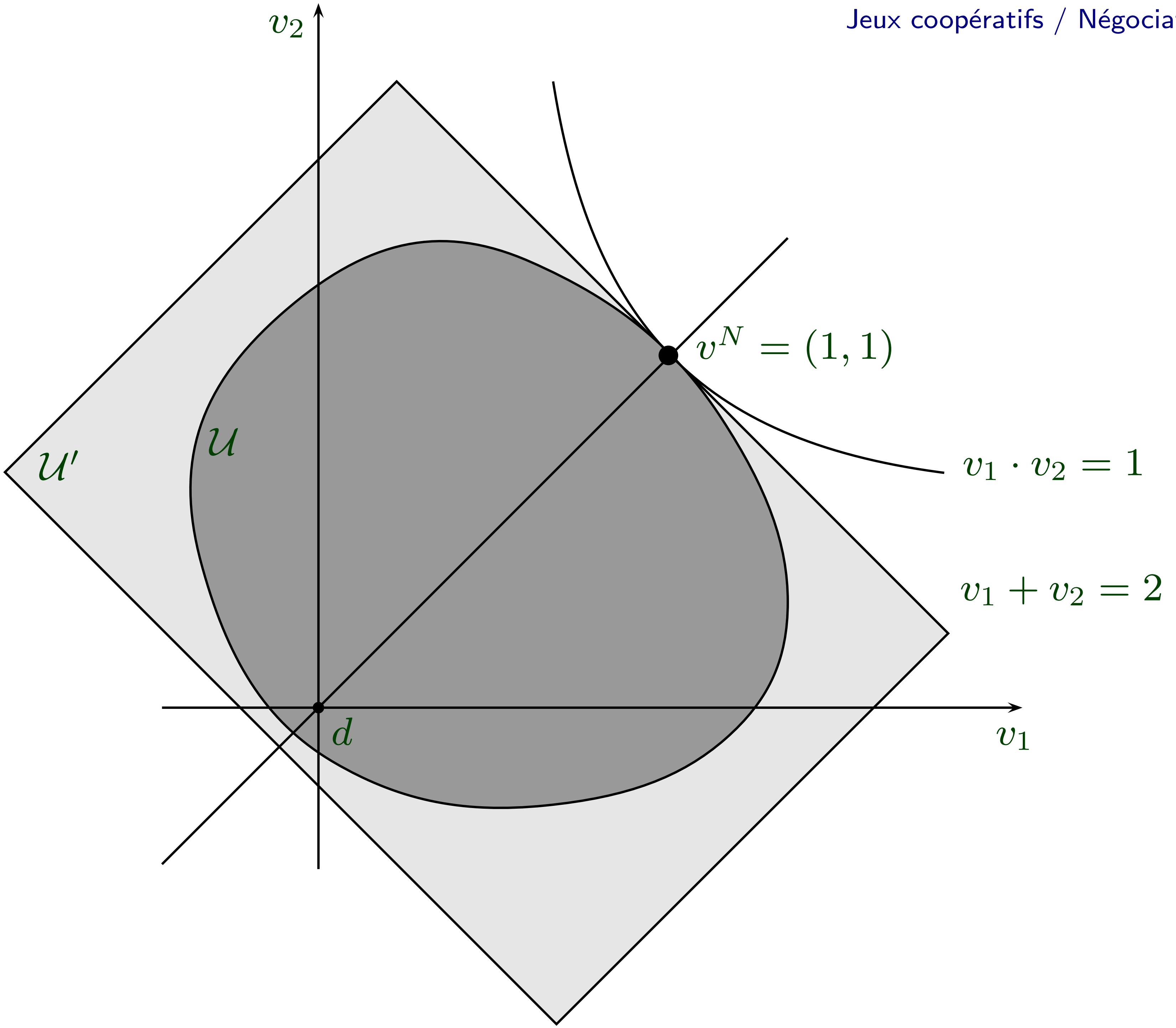
v^N est solution de $\max_{v \in \mathcal{U}} (v_1 \cdot v_2) \Rightarrow v^N$ tangente à $v_1 \cdot v_2 = 1$. Équation de la tangente : $v_1 + v_2 = 2$

$\mathcal{U}$ convexe $\Rightarrow \mathcal{U}$ est en dessous de cette tangente

$\Rightarrow$ on peut inclure $\mathcal{U}$ dans un grand rectangle symétrique $\mathcal{U}'$ (voir figure)

$\boxed{\text{PAR}}$, $\boxed{\text{SYM}}$ $\Rightarrow \psi^*(\mathcal{U}', d) = v^N$

$\boxed{\text{IIA}}$ $\Rightarrow \psi^*(\mathcal{U}, d) = \psi^*(\mathcal{U}', d) = v^N$ car $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}'$


v_2
v_1
d
$\mathcal{U}'$
$\mathcal{U}$
$v^N = (1, 1)$
$v_1 \cdot v_2 = 1$
$v_1 + v_2 = 2$

Lien avec l'approche stratégique

("Programme de Nash")

Lien avec l'approche stratégique

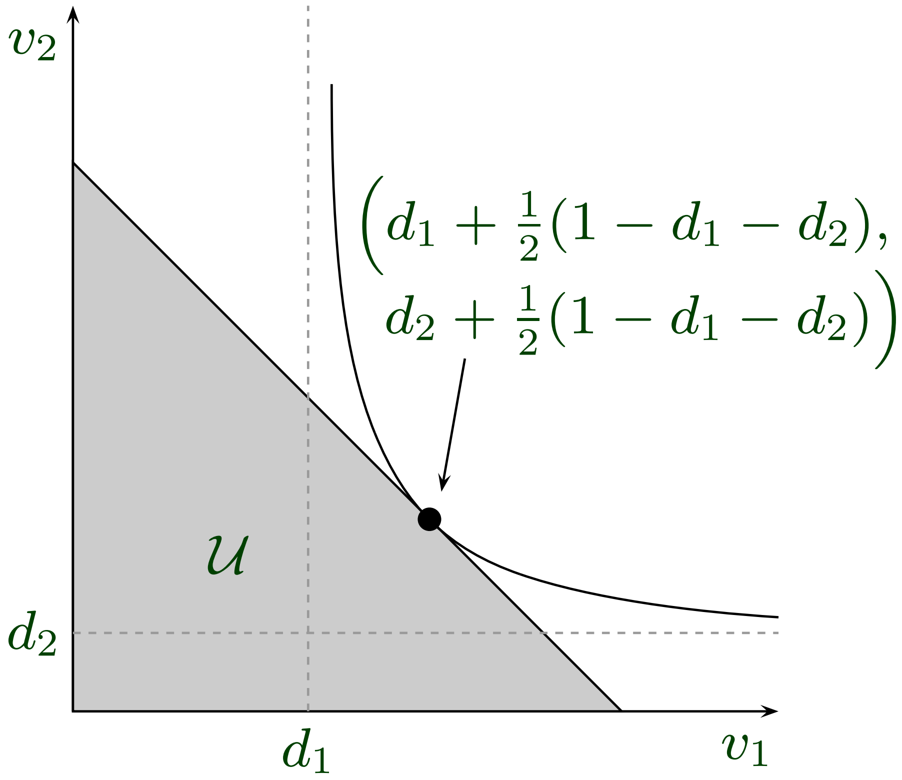
("Programme de Nash")

Considérons le problème de négociation $(\mathcal{U}, d)$ où $\mathcal{U} = \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}_+^2 : v_1 + v_2 \leq 1\}$

Lien avec l'approche stratégique

("Programme de Nash")

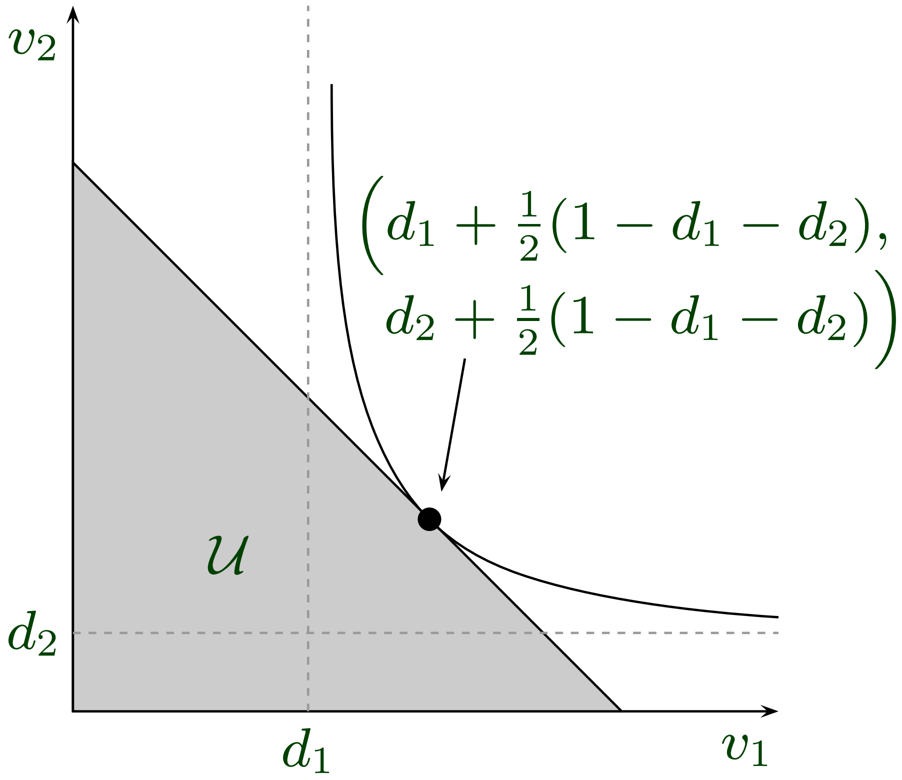
Considérons le problème de négociation $(\mathcal{U}, d)$ où $\mathcal{U} = \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2_+ : v_1 + v_2 \leq 1\}$



Lien avec l'approche stratégique

("Programme de Nash")

Considérons le problème de négociation $(\mathcal{U}, d)$ où $\mathcal{U} = \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2_+ : v_1 + v_2 \leq 1\}$



☞ Solution de Nash identique à la solution de négociation séquentielle (ENPSJ) avec risque de rupture exogène $\alpha \to 0$ (sans actualisation), où $d = b$ est la paire de paiements des joueurs lorsque le jeu est interrompu (Binmore et al., 1986)

Généralisation à n joueurs ?

Généralisation à n joueurs ?

- **1ère manière évidente** : $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$, point de désaccord $d = (d_1, \ldots, d_n) \in \mathcal{U}$

Généralisation à n joueurs ?

- **1ère manière évidente** : $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$, point de désaccord $d = (d_1, \ldots, d_n) \in \mathcal{U}$

Interprétation : soit tout le monde est d'accord avec la solution $v \in \mathcal{U}$, soit désaccord d

$$\hookrightarrow \quad \max_{v \in \mathcal{U}} \prod_{i=1}^{n} (v_i - d_i) \quad \text{s.c.} \quad v \geq d$$

Généralisation à n joueurs ?

- **1ère manière évidente** : $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$, point de désaccord $d = (d_1, \ldots, d_n) \in \mathcal{U}$

Interprétation : soit tout le monde est d'accord avec la solution $v \in \mathcal{U}$, soit désaccord d

$$\hookrightarrow \quad \max_{v \in \mathcal{U}} \prod_{i=1}^{n} (v_i - d_i) \quad \text{s.c.} \quad v \geq d$$

... mais pas de prise en compte de la formation de groupes de joueurs dans la formation de la solution et dans leurs influences sur la solution par la pression (menace)

Généralisation à n joueurs ?

- **1ère manière évidente** : $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$, point de désaccord $d = (d_1, \ldots, d_n) \in \mathcal{U}$

Interprétation : soit tout le monde est d'accord avec la solution $v \in \mathcal{U}$, soit désaccord d

$$\hookrightarrow \quad \max_{v \in \mathcal{U}} \prod_{i=1}^{n} (v_i - d_i) \quad \text{s.c.} \quad v \geq d$$

... mais pas de prise en compte de la formation de groupes de joueurs dans la formation de la solution et dans leurs influences sur la solution par la pression (menace)

- **2ème manière** : prise en compte de la formation des groupes de joueurs, alliances ou coalitions, au moins comme moyen de pression (rôle potentiel des coalitions)

Références

Binmore, K. G., A. Rubinstein, et A. Wolinsky (1986) : "The Nash Bargaining Solution in Economic Modelling," Rand Journal of Economics, 17, 176–188.