Coalitions et fonction caractéristique

(3 septembre 2007)

Coalitions et fonction caractéristique

(3 septembre 2007)

Jeu coalitionnel : modèle de décisions interactives axé sur le comportement des groupes de joueurs, ou coalitions

Coalitions et fonction caractéristique

(3 septembre 2007)

Jeu coalitionnel : modèle de décisions interactives axé sur le comportement des groupes de joueurs, ou coalitions

Une coalition est un sous ensemble $S \subseteq N \equiv \{1, \ldots, n\}$, $S \neq \emptyset$, de l'ensemble de tous les joueurs ($2^n - 1$ coalitions sont possibles)

Coalitions et fonction caractéristique

(3 septembre 2007)

Jeu coalitionnel : modèle de décisions interactives axé sur le comportement des groupes de joueurs, ou coalitions

Une coalition est un sous ensemble $S \subseteq N \equiv \{1, \ldots, n\}$, $S \neq \emptyset$, de l'ensemble de tous les joueurs ($2^n - 1$ coalitions sont possibles)

$S = \{i\}$: coalition d'un seul joueur (singleton)

Coalitions et fonction caractéristique

(3 septembre 2007)

Jeu coalitionnel : modèle de décisions interactives axé sur le comportement des groupes de joueurs, ou coalitions

Une coalition est un sous ensemble $S \subseteq N \equiv \{1, \ldots, n\}$, $S \neq \emptyset$, de l'ensemble de tous les joueurs ($2^n - 1$ coalitions sont possibles)

$S = \{i\}$: coalition d'un seul joueur (singleton)
$S = N$: coalition de tous les joueurs (grande coalition)

Coalitions et fonction caractéristique

(3 septembre 2007)

Jeu coalitionnel : modèle de décisions interactives axé sur le comportement des groupes de joueurs, ou coalitions

Une coalition est un sous ensemble $S \subseteq N \equiv \{1, \ldots, n\}$, $S \neq \emptyset$, de l'ensemble de tous les joueurs ($2^n - 1$ coalitions sont possibles)

- $S = \{i\}$: coalition d'un seul joueur (singleton)
- $S = N$: coalition de tous les joueurs (grande coalition)

Hypothèse ici : utilité transférable (“*TU games*”) : on peut additionner les utilités des joueurs d'une coalition et les redistribuer à ses membres (il existe une “monnaie” commune à tous avec laquelle on peut effectuer des transferts)

Coalitions et fonction caractéristique

(3 septembre 2007)

Jeu coalitionnel : modèle de décisions interactives axé sur le comportement des groupes de joueurs, ou coalitions

Une coalition est un sous ensemble $S \subseteq N \equiv \{1, \ldots, n\}$, $S \neq \emptyset$, de l'ensemble de tous les joueurs ($2^n - 1$ coalitions sont possibles)

$S = \{i\}$: coalition d'un seul joueur (singleton)
$S = N$: coalition de tous les joueurs (grande coalition)

Hypothèse ici : utilité transférable ("*TU games*") : on peut additionner les utilités des joueurs d'une coalition et les redistribuer à ses membres (il existe une "monnaie" commune à tous avec laquelle on peut effectuer des transferts)

Définition. Un jeu coalitionnel à utilité transférable, ou jeu sous forme caractéristique, est une paire (N, v) où

Coalitions et fonction caractéristique

(3 septembre 2007)

Jeu coalitionnel : modèle de décisions interactives axé sur le comportement des groupes de joueurs, ou coalitions

Une coalition est un sous ensemble $S \subseteq N \equiv \{1, \ldots, n\}$, $S \neq \emptyset$, de l'ensemble de tous les joueurs ($2^n - 1$ coalitions sont possibles)

$S = \{i\}$: coalition d'un seul joueur (singleton)
$S = N$: coalition de tous les joueurs (grande coalition)

Hypothèse ici : utilité transférable (“*TU games*”) : on peut additionner les utilités des joueurs d'une coalition et les redistribuer à ses membres (il existe une “monnaie” commune à tous avec laquelle on peut effectuer des transferts)

Définition. Un jeu coalitionnel à utilité transférable, ou jeu sous forme caractéristique, est une paire (N, v) où

– N est un ensemble des joueurs

Coalitions et fonction caractéristique

(3 septembre 2007)

Jeu coalitionnel : modèle de décisions interactives axé sur le comportement des groupes de joueurs, ou coalitions

Une coalition est un sous ensemble $S \subseteq N \equiv \{1, \ldots, n\}$, $S \neq \emptyset$, de l'ensemble de tous les joueurs ($2^n - 1$ coalitions sont possibles)

$S = \{i\}$: coalition d'un seul joueur (singleton)
$S = N$: coalition de tous les joueurs (grande coalition)

Hypothèse ici : utilité transférable ("*TU games*") : on peut additionner les utilités des joueurs d'une coalition et les redistribuer à ses membres (il existe une "monnaie" commune à tous avec laquelle on peut effectuer des transferts)

Définition. Un jeu coalitionnel à utilité transférable, ou jeu sous forme caractéristique, est une paire (N, v) où

– N est un ensemble des joueurs
– v est une fonction caractéristique qui associe une valeur $v(S) \in \mathbb{R}$ à chaque coalition S de N

Pour chaque coalition S, la valeur $v(S)$ est le paiement total que peuvent se partager les joueurs appartenant à la coalition de S (indépendamment du comportement des joueurs qui ne font pas partie de S)

Pour chaque coalition S, la valeur $v(S)$ est le paiement total que peuvent se partager les joueurs appartenant à la coalition de S (indépendamment du comportement des joueurs qui ne font pas partie de S)

➥ $v(S) =$ idée a priori du pouvoir du groupe S

Pour chaque coalition S, la valeur $v(S)$ est le paiement total que peuvent se partager les joueurs appartenant à la coalition de S (indépendamment du comportement des joueurs qui ne font pas partie de S)

➥ $v(S) =$ idée a priori du pouvoir du groupe S

Définition. Un jeu est

Pour chaque coalition S, la valeur $v(S)$ est le paiement total que peuvent se partager les joueurs appartenant à la coalition de S (indépendamment du comportement des joueurs qui ne font pas partie de S)

➥ $v(S) =$ idée a priori du pouvoir du groupe S

Définition. Un jeu est

– symétrique si la valeur d'une coalition ne dépend que de sa taille : il existe une fonction f telle que $v(S) = f(|S|)$ pour tout $S \subseteq N$

Pour chaque coalition S, la valeur $v(S)$ est le paiement total que peuvent se partager les joueurs appartenant à la coalition de S (indépendamment du comportement des joueurs qui ne font pas partie de S)

➥ $v(S) =$ idée a priori du pouvoir du groupe S

Définition. Un jeu est

– symétrique si la valeur d'une coalition ne dépend que de sa taille : il existe une fonction f telle que $v(S) = f(|S|)$ pour tout $S \subseteq N$

– monotone si $S \subseteq T \Rightarrow v(S) \leq v(T)$

Pour chaque coalition S, la valeur $v(S)$ est le paiement total que peuvent se partager les joueurs appartenant à la coalition de S (indépendamment du comportement des joueurs qui ne font pas partie de S)

➥ $v(S) =$ idée a priori du pouvoir du groupe S

Définition. Un jeu est

– symétrique si la valeur d'une coalition ne dépend que de sa taille : il existe une fonction f telle que $v(S) = f(|S|)$ pour tout $S \subseteq N$

– monotone si $S \subseteq T \Rightarrow v(S) \leq v(T)$

Hypothèse : Superadditivité : $S \cap T = \emptyset \Rightarrow v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$

Pour chaque coalition S, la valeur $v(S)$ est le paiement total que peuvent se partager les joueurs appartenant à la coalition de S (indépendamment du comportement des joueurs qui ne font pas partie de S)

➥ $v(S) =$ idée a priori du pouvoir du groupe S

Définition. Un jeu est

– symétrique si la valeur d'une coalition ne dépend que de sa taille : il existe une fonction f telle que $v(S) = f(|S|)$ pour tout $S \subseteq N$

– monotone si $S \subseteq T \Rightarrow v(S) \leq v(T)$

Hypothèse : Superadditivité : $S \cap T = \emptyset \Rightarrow v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$

Remarque.

– Superadditivité $\Rightarrow v(N) \geq \sum_k v(S_k)$ pour toute partition $\{S_k\}_k$ de N

Pour chaque coalition S, la valeur $v(S)$ est le paiement total que peuvent se partager les joueurs appartenant à la coalition de S (indépendamment du comportement des joueurs qui ne font pas partie de S)

➥ $v(S) =$ idée a priori du pouvoir du groupe S

Définition. Un jeu est

– symétrique si la valeur d'une coalition ne dépend que de sa taille : il existe une fonction f telle que $v(S) = f(|S|)$ pour tout $S \subseteq N$

– monotone si $S \subseteq T \Rightarrow v(S) \leq v(T)$

Hypothèse : Superadditivité : $S \cap T = \emptyset \Rightarrow v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$

Remarque.

– Superadditivité $\Rightarrow v(N) \geq \sum_k v(S_k)$ pour toute partition $\{S_k\}_k$ de N

– Si $v(S) \geq 0 \; \forall \; S$ alors superadditivité $\Rightarrow$ monotonicité

Pour chaque coalition S, la valeur $v(S)$ est le paiement total que peuvent se partager les joueurs appartenant à la coalition de S (indépendamment du comportement des joueurs qui ne font pas partie de S)

➥ $v(S) =$ idée a priori du pouvoir du groupe S

Définition. Un jeu est

– symétrique si la valeur d'une coalition ne dépend que de sa taille : il existe une fonction f telle que $v(S) = f(|S|)$ pour tout $S \subseteq N$

– monotone si $S \subseteq T \Rightarrow v(S) \leq v(T)$

Hypothèse : Superadditivité : $S \cap T = \emptyset \Rightarrow v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$

Remarque.

– Superadditivité $\Rightarrow v(N) \geq \sum_k v(S_k)$ pour toute partition $\{S_k\}_k$ de N

– Si $v(S) \geq 0 \;\forall\, S$ alors superadditivité $\Rightarrow$ monotonicité

✍ Trouver un jeu superadditif non-monotone

Jeux simples

Jeux simples

Un jeu coalitionnel (N, v) est **simple** si $v(S) = 1$ (coalition gagnante) ou $v(S) = 0$ (coalition perdante), et $v(N) = 1$

Jeux simples

Un jeu coalitionnel (N, v) est **simple** si $v(S) = 1$ (coalition gagnante) ou $v(S) = 0$ (coalition perdante), et $v(N) = 1$

Remarque. D'après la superadditivité, si $v(S) = 1$ alors $v(N \backslash S) = 0$ et $v(T) = 1$ pour $S \subseteq T$ (mais pas $\Leftarrow$)

Jeux simples

Un jeu coalitionnel (N, v) est **simple** si $v(S) = 1$ (coalition gagnante) ou $v(S) = 0$ (coalition perdante), et $v(N) = 1$

Remarque. D'après la superadditivité, si $v(S) = 1$ alors $v(N \backslash S) = 0$ et $v(T) = 1$ pour $S \subseteq T$ (mais pas $\Leftarrow$)

Un joueur j a un droit de veto s'il appartient à toutes les coalitions gagnantes ($v(S) = 1 \Rightarrow j \in S$)

Jeux simples

Un jeu coalitionnel (N, v) est **simple** si $v(S) = 1$ (coalition gagnante) ou $v(S) = 0$ (coalition perdante), et $v(N) = 1$

Remarque. D'après la superadditivité, si $v(S) = 1$ alors $v(N \backslash S) = 0$ et $v(T) = 1$ pour $S \subseteq T$ (mais pas $\Leftarrow$)

Un joueur j a un droit de veto s'il appartient à toutes les coalitions gagnantes ($v(S) = 1 \Rightarrow j \in S$)

Un joueur j est un dictateur si une coalition est gagnante ssi il en fait partie ($v(S) = 1 \Leftrightarrow j \in S$)

Exemples. (3 joueurs)

Exemples. (3 joueurs)

– Majorité simple. Une coalition est gagnante ssi elle comprend au moins 2 membres

– Majorité simple. Une coalition est gagnante ssi elle comprend au moins 2 membres

$$\hookrightarrow \begin{cases} v(1) = v(2) = v(3) = 0 \\ v(1,2) = v(1,3) = v(2,3) = v(1,2,3) = 1 \end{cases}$$

– Majorité simple. Une coalition est gagnante ssi elle comprend au moins 2 membres

$$\hookrightarrow \begin{cases} v(1) = v(2) = v(3) = 0 \\ v(1,2) = v(1,3) = v(2,3) = v(1,2,3) = 1 \end{cases}$$

– Unanimité. Une coalition est gagnante ssi elle comprend tous les membres

Exemples. (3 joueurs)

– Majorité simple. Une coalition est gagnante ssi elle comprend au moins 2 membres

➥ $$\begin{cases} v(1) = v(2) = v(3) = 0 \\ v(1,2) = v(1,3) = v(2,3) = v(1,2,3) = 1 \end{cases}$$

– Unanimité. Une coalition est gagnante ssi elle comprend tous les membres

➥ $$\begin{cases} v(1,2,3) = 1 \\ v(S) = 0 \text{ pour les autres coalitions} \end{cases}$$

– Majorité simple. Une coalition est gagnante ssi elle comprend au moins 2 membres

➥ $$\begin{cases} v(1) = v(2) = v(3) = 0 \\ v(1,2) = v(1,3) = v(2,3) = v(1,2,3) = 1 \end{cases}$$

– Unanimité. Une coalition est gagnante ssi elle comprend tous les membres

➥ $$\begin{cases} v(1,2,3) = 1 \\ v(S) = 0 \text{ pour les autres coalitions} \end{cases}$$

– Droit de veto. Une coalition est gagnante ssi elle comprend au moins 2 membres, dont le joueur 2

Exemples. (3 joueurs)

– Majorité simple. Une coalition est gagnante ssi elle comprend au moins 2 membres

$$\hookrightarrow \begin{cases} v(1) = v(2) = v(3) = 0 \\ v(1,2) = v(1,3) = v(2,3) = v(1,2,3) = 1 \end{cases}$$

– Unanimité. Une coalition est gagnante ssi elle comprend tous les membres

$$\hookrightarrow \begin{cases} v(1,2,3) = 1 \\ v(S) = 0 \text{ pour les autres coalitions} \end{cases}$$

– Droit de veto. Une coalition est gagnante ssi elle comprend au moins 2 membres, dont le joueur 2

$$\hookrightarrow \begin{cases} v(1) = v(2) = v(3) = v(1,3) = 0 \\ v(1,2) = v(2,3) = v(1,2,3) = 1 \end{cases}$$

Exemples. (3 joueurs)

– Majorité simple. Une coalition est gagnante ssi elle comprend au moins 2 membres

➥ $\begin{cases} v(1) = v(2) = v(3) = 0 \\ v(1,2) = v(1,3) = v(2,3) = v(1,2,3) = 1 \end{cases}$

– Unanimité. Une coalition est gagnante ssi elle comprend tous les membres

➥ $\begin{cases} v(1,2,3) = 1 \\ v(S) = 0 \text{ pour les autres coalitions} \end{cases}$

– Droit de veto. Une coalition est gagnante ssi elle comprend au moins 2 membres, dont le joueur 2

➥ $\begin{cases} v(1) = v(2) = v(3) = v(1,3) = 0 \\ v(1,2) = v(2,3) = v(1,2,3) = 1 \end{cases}$

– Dictature. Une coalition est gagnante ssi elle comprend le joueur 2

Exemples. (3 joueurs)

– Majorité simple. Une coalition est gagnante ssi elle comprend au moins 2 membres

$$\hookrightarrow \begin{cases} v(1) = v(2) = v(3) = 0 \\ v(1,2) = v(1,3) = v(2,3) = v(1,2,3) = 1 \end{cases}$$

– Unanimité. Une coalition est gagnante ssi elle comprend tous les membres

$$\hookrightarrow \begin{cases} v(1,2,3) = 1 \\ v(S) = 0 \text{ pour les autres coalitions} \end{cases}$$

– Droit de veto. Une coalition est gagnante ssi elle comprend au moins 2 membres, dont le joueur 2

$$\hookrightarrow \begin{cases} v(1) = v(2) = v(3) = v(1,3) = 0 \\ v(1,2) = v(2,3) = v(1,2,3) = 1 \end{cases}$$

– Dictature. Une coalition est gagnante ssi elle comprend le joueur 2

$$\hookrightarrow \begin{cases} v(1) = v(3) = v(1,3) = 0 \\ v(2) = v(1,2) = v(2,3) = v(1,2,3) = 1 \end{cases}$$

Problème : comment répartir $v(N)$ entre les n joueurs ?

Problème : comment répartir $v(N)$ entre les n joueurs ?

Le coeur

Problème : comment répartir $v(N)$ entre les n joueurs ?

Le coeur

Concept de solution pour les jeux coalitionnels qui exige qu'aucune coalition ne peut dévier en améliorant le paiement de tous ses membres

Problème : comment répartir $v(N)$ entre les n joueurs ?

Le coeur

Concept de solution pour les jeux coalitionnels qui exige qu'aucune coalition ne peut dévier en améliorant le paiement de tous ses membres

Pour un profil de paiements (répartition) $(x_i)_{i \in N}$ et une coalition S on note $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$ la somme des paiements des membres de S

Problème : comment répartir $v(N)$ entre les n joueurs ?

Le coeur

Concept de solution pour les jeux coalitionnels qui exige qu'aucune coalition ne peut dévier en améliorant le paiement de tous ses membres

Pour un profil de paiements (répartition) $(x_i)_{i \in N}$ et une coalition S on note $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$ la somme des paiements des membres de S

Définition. Un profil de paiements $(x_i)_{i \in N}$ est S-réalisable si $x(S) = v(S)$. Il est réalisable s'il est N-réalisable

Définition. Le **coeur** d'un jeu coalitionnel (N, v) est l'ensemble des répartitions $(x_i)_{i \in N}$ réalisables telles que

$$x(S) \geq v(S) \quad \forall\, S \subseteq N$$

Définition. Le **coeur** d'un jeu coalitionnel (N, v) est l'ensemble des répartitions $(x_i)_{i \in N}$ réalisables telles que

$$x(S) \geq v(S) \quad \forall\, S \subseteq N$$

ou, de manière équivalente, telles qu'il n'existe pas de coalition S et de répartition S-réalisable $(y_i)_{i \in N}$ où $y_i > x_i$ pour tout $i \in S$

Définition. Le **coeur** d'un jeu coalitionnel (N, v) est l'ensemble des répartitions $(x_i)_{i \in N}$ réalisables telles que

$$x(S) \geq v(S) \quad \forall\, S \subseteq N$$

ou, de manière équivalente, telles qu'il n'existe pas de coalition S et de répartition S-réalisable $(y_i)_{i \in N}$ où $y_i > x_i$ pour tout $i \in S$

☞ La répartition $(x_i)_{i \in N}$ ne peut pas être bloquée par une coalition S (“stabilité sociale”)

Définition. Le **coeur** d'un jeu coalitionnel (N, v) est l'ensemble des répartitions $(x_i)_{i \in N}$ réalisables telles que

$$x(S) \geq v(S) \quad \forall\, S \subseteq N$$

ou, de manière équivalente, telles qu'il n'existe pas de coalition S et de répartition S-réalisable $(y_i)_{i \in N}$ où $y_i > x_i$ pour tout $i \in S$

☞ La répartition $(x_i)_{i \in N}$ ne peut pas être bloquée par une coalition S ("stabilité sociale")

Remarque. Rationalité collective ($x(N) = v(N)$) et rationalité individuelle ($x_i \geq v(i)\ \forall\, i$) vérifiées

Exemples

Jeux simples.

Exemples

Jeux simples.

Majorité.

Exemples

Jeux simples.

Majorité.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_i \geq 0, \quad \forall\, i \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 + x_3 \geq 1 \\ x_2 + x_3 \geq 1 \end{cases}$$

Exemples

Jeux simples.

Majorité.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_i \geq 0, \quad \forall\, i \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 + x_3 \geq 1 \\ x_2 + x_3 \geq 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{impossible (coeur} = \emptyset)$$

Exemples

Jeux simples.

Majorité.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_i \geq 0, \quad \forall\ i \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 + x_3 \geq 1 \\ x_2 + x_3 \geq 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{impossible (coeur} = \emptyset)$$

Unanimité.

Exemples

Jeux simples.

Majorité.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_i \geq 0, \quad \forall\ i \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 + x_3 \geq 1 \\ x_2 + x_3 \geq 1 \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad \text{impossible (coeur} = \emptyset)$$

Unanimité.

$$\text{Coeur} = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 = 1,\ x_i \geq 0\ \forall\ i\}$$

Droit de veto.

Droit de veto.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_i \geq 0, \quad \forall\, i \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_2 + x_3 \geq 1 \end{cases}$$

Droit de veto.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_i \geq 0, \quad \forall\, i \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_2 + x_3 \geq 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \text{ Coeur} = \{(0, 1, 0)\}$$

Droit de veto.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_i \geq 0, \quad \forall\, i \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_2 + x_3 \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \text{ Coeur} = \{(0,1,0)\}$$

Dictature.

Droit de veto.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_i \geq 0, \quad \forall\, i \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_2 + x_3 \geq 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{Coeur} = \{(0,1,0)\}$$

Dictature.

$$\text{Coeur} = \{(0,1,0)\}$$

Droit de veto.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_i \geq 0, \quad \forall\, i \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_2 + x_3 \geq 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{Coeur} = \{(0, 1, 0)\}$$

Dictature.

$$\text{Coeur} = \{(0, 1, 0)\}$$

➥ Pas de différence entre veto et dictature. (Il y a une différence avec la valeur de Shapley)

Proposition. *Dans un jeu simple,*

(i) si aucun joueur n'a un droit de veto alors le coeur est vide

Proposition. *Dans un jeu simple,*

(i) si aucun joueur n'a un droit de veto alors le coeur est vide

(ii) si au moins un joueur a un droit de veto, alors le coeur est non vide : c'est l'ensemble de toutes les répartitions réalisables (et positives) qui donnent un paiement nul aux joueurs qui n'ont pas de droit de veto

Proposition. *Dans un jeu simple,*

(i) si aucun joueur n'a un droit de veto alors le coeur est vide

(ii) si au moins un joueur a un droit de veto, alors le coeur est non vide : c'est l'ensemble de toutes les répartitions réalisables (et positives) qui donnent un paiement nul aux joueurs qui n'ont pas de droit de veto

Preuve.

(i) Aucun joueur n'a un droit de veto $\Leftrightarrow \forall\, i \in N$, $\exists\, S$ t.q. $v(S) = 1$ et $i \notin S$, donc $v(N\backslash i) = 1$ pour tout i (monotonicité)

Proposition. *Dans un jeu simple,*

(i) si aucun joueur n'a un droit de veto alors le coeur est vide

(ii) si au moins un joueur a un droit de veto, alors le coeur est non vide : c'est l'ensemble de toutes les répartitions réalisables (et positives) qui donnent un paiement nul aux joueurs qui n'ont pas de droit de veto

Preuve.

(i) Aucun joueur n'a un droit de veto $\Leftrightarrow \forall\, i \in N$, $\exists\, S$ t.q. $v(S) = 1$ et $i \notin S$, donc $v(N \backslash i) = 1$ pour tout i (monotonicité)

$x \in$ Coeur $\Rightarrow x(N) = 1$ et $x(N \backslash i) \geq v(N \backslash i) = 1$ pour tout $i \Rightarrow$ impossible

Proposition. *Dans un jeu simple,*

(i) si aucun joueur n'a un droit de veto alors le coeur est vide

(ii) si au moins un joueur a un droit de veto, alors le coeur est non vide : c'est l'ensemble de toutes les répartitions réalisables (et positives) qui donnent un paiement nul aux joueurs qui n'ont pas de droit de veto

Preuve.

(i) Aucun joueur n'a un droit de veto $\Leftrightarrow \forall\, i \in N$, $\exists\, S$ t.q. $v(S) = 1$ et $i \notin S$, donc $v(N\backslash i) = 1$ pour tout i (monotonicité)

$x \in$ Coeur $\Rightarrow x(N) = 1$ et $x(N\backslash i) \geq v(N\backslash i) = 1$ pour tout $i \Rightarrow$ impossible

(ii) Soit $V \neq \emptyset$ l'ensemble des joueurs ayant un droit de veto et x une répartition réalisable et positive qui donne un paiement nul aux joueurs qui n'ont pas de droit de veto :

$$\left.\begin{array}{l} x_i \geq 0 \quad \forall\, i \in V \\ x_i = 0 \quad \forall\, i \notin V \\ \displaystyle\sum_{i \in N} x_i = 1 \end{array}\right\} \tag{1}$$

- Si S est gagnante alors $V \subseteq S$, donc $x(S) = 1 = v(S)$
- Si S est perdante alors $v(S) = 0$ donc $x(S) \geq v(S)$

donc $x \in$ coeur

$$\left.\begin{array}{l} x_i \geq 0 \quad \forall\, i \in V \\ x_i = 0 \quad \forall\, i \notin V \\ \displaystyle\sum_{i \in N} x_i = 1 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

- Si S est gagnante alors $V \subseteq S$, donc $x(S) = 1 = v(S)$
- Si S est perdante alors $v(S) = 0$ donc $x(S) \geq v(S)$

donc $x \in$ coeur

Pour montrer que seules les répartitions vérifiant (1) appartiennent au coeur, soit x une répartition du coeur qui ne vérifie pas (1), donc t.q. $x_j > 0$ pour un $j \notin V$

$j \notin V \stackrel{\text{def}}{\Rightarrow} \exists\, S$, $j \notin S$, t.q. $v(S) = 1 > x(S)$, donc S bloque x, i.e. $x \notin$ coeur $\square$

$$\left.\begin{array}{l} x_i \geq 0 \quad \forall\, i \in V \\ x_i = 0 \quad \forall\, i \notin V \\ \displaystyle\sum_{i \in N} x_i = 1 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

- Si S est gagnante alors $V \subseteq S$, donc $x(S) = 1 = v(S)$
- Si S est perdante alors $v(S) = 0$ donc $x(S) \geq v(S)$

donc $x \in$ coeur

Pour montrer que seules les répartitions vérifiant (1) appartiennent au coeur, soit x une répartition du coeur qui ne vérifie pas (1), donc t.q. $x_j > 0$ pour un $j \notin V$

$j \notin V \overset{\text{def}}{\Rightarrow} \exists\, S$, $j \notin S$, t.q. $v(S) = 1 > x(S)$, donc S bloque x, i.e. $x \notin$ coeur $\square$

Conditions générales, nécessaires et suffisantes, de non vacuité de coeur : Bondareva (1963) et Shapley (1967) (voir Osborne et Rubinstein, 1994, pp. 262–263)

Une économie de production

Une économie de production

Firme (propriétaire terrien) : joueur 0

K travailleurs : joueurs $1, \ldots, K$

k travailleurs peuvent produire avec le propriétaire $f(k) \geq 0$, où $f \nearrow$, concave (rendements d'échelle décroissantes) et $f(0) = 0$. Sans la firme ils produisent 0.

Une économie de production

Firme (propriétaire terrien) : joueur 0

K travailleurs : joueurs $1, \ldots, K$

k travailleurs peuvent produire avec le propriétaire $f(k) \geq 0$, où $f \nearrow$, concave (rendements d'échelle décroissantes) et $f(0) = 0$. Sans la firme ils produisent 0.

$$\hookrightarrow \quad \begin{cases} N = \{0, 1, \ldots, K\} \\ v(S) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \notin S \\ f(|S| - 1) & \text{si } 0 \in S \end{cases} \end{cases}$$

Une économie de production

Firme (propriétaire terrien) : joueur 0

K travailleurs : joueurs $1, \dots, K$

k travailleurs peuvent produire avec le propriétaire $f(k) \geq 0$, où $f \nearrow$, concave (rendements d'échelle décroissantes) et $f(0) = 0$. Sans la firme ils produisent 0.

$$\hookrightarrow \quad \begin{cases} N = \{0, 1, \dots, K\} \\ v(S) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \notin S \\ f(|S| - 1) & \text{si } 0 \in S \end{cases} \end{cases}$$

Coeur :

$$x_0 + x_1 + \cdots + x_K = f(K) \tag{2}$$

$$x_i \geq 0, \quad \forall\, i \tag{3}$$

$$x(S) \geq f(|S| - 1) \quad \text{si } 0 \in S \tag{4}$$

Une économie de production

Firme (propriétaire terrien) : joueur 0

K travailleurs : joueurs $1, \ldots, K$

k travailleurs peuvent produire avec le propriétaire $f(k) \geq 0$, où $f \nearrow$, concave (rendements d'échelle décroissantes) et $f(0) = 0$. Sans la firme ils produisent 0.

$$\hookrightarrow \quad \begin{cases} N = \{0, 1, \ldots, K\} \\ v(S) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \notin S \\ f(|S| - 1) & \text{si } 0 \in S \end{cases} \end{cases}$$

Coeur :

$$x_0 + x_1 + \cdots + x_K = f(K) \tag{2}$$

$$x_i \geq 0, \quad \forall\, i \tag{3}$$

$$x(S) \geq f(|S| - 1) \quad \text{si } 0 \in S \tag{4}$$

(4) $\Rightarrow x(N \backslash i) \geq f(K-1) \ \forall\, i \neq 0 \overset{(2)}{\Rightarrow} f(K) - x_i \geq f(K-1) \Rightarrow$
$x_i \leq f(K) - f(K-1) \ \forall\, i \neq 0$

On a montré que $x \in$ coeur $\Rightarrow x$ appartient à l'ensemble

$$x_0 + x_1 + \cdots + x_K = f(K) \quad (2)$$

$$x_i \geq 0, \quad \forall\, i \quad (3)$$

$$x_i \leq f(K) - f(K-1), \quad i = 1, \ldots, K \quad (5)$$

On a montré que $x \in$ coeur $\Rightarrow$ x appartient à l'ensemble

$$x_0 + x_1 + \cdots + x_K = f(K) \tag{2}$$

$$x_i \geq 0, \quad \forall\, i \tag{3}$$

$$x_i \leq f(K) - f(K-1), \quad i = 1, \ldots, K \tag{5}$$

Montrons la réciproque : soit x dans cet ensemble

On a montré que $x \in$ coeur $\Rightarrow$ x appartient à l'ensemble

$$x_0 + x_1 + \cdots + x_K = f(K) \tag{2}$$

$$x_i \geq 0, \quad \forall\, i \tag{3}$$

$$x_i \leq f(K) - f(K-1), \quad i = 1, \ldots, K \tag{5}$$

Montrons la réciproque : soit x dans cet ensemble

Si $0 \notin S$ alors $v(S) = 0$ donc $x(S) \geq v(S)$

On a montré que $x \in$ coeur $\Rightarrow x$ appartient à l'ensemble

$$x_0 + x_1 + \cdots + x_K = f(K) \tag{2}$$

$$x_i \geq 0, \quad \forall\, i \tag{3}$$

$$x_i \leq f(K) - f(K-1), \quad i = 1, \ldots, K \tag{5}$$

Montrons la réciproque : soit x dans cet ensemble

Si $0 \notin S$ alors $v(S) = 0$ donc $x(S) \geq v(S)$

Si $0 \in S$ alors $x_i \leq f(K) - f(K-1)\ \forall\, i \in N \backslash S \Rightarrow$
$x(N \backslash S) \leq (K-k)(f(K) - f(K-1))$, où $k = |S| - 1 =$ nb de travailleurs dans S

On a montré que $x \in$ coeur $\Rightarrow x$ appartient à l'ensemble

$$x_0 + x_1 + \cdots + x_K = f(K) \tag{2}$$

$$x_i \geq 0, \quad \forall\, i \tag{3}$$

$$x_i \leq f(K) - f(K-1), \quad i = 1, \ldots, K \tag{5}$$

Montrons la réciproque : soit x dans cet ensemble

Si $0 \notin S$ alors $v(S) = 0$ donc $x(S) \geq v(S)$

Si $0 \in S$ alors $x_i \leq f(K) - f(K-1)\ \forall\, i \in N \backslash S \Rightarrow$
$x(N \backslash S) \leq (K-k)(f(K) - f(K-1))$, où $k = |S| - 1 =$ nb de travailleurs dans S

$\Rightarrow x(S) \geq f(K) - (K-k)(f(K) - f(K-1)) \overset{\text{concavité}}{\geq} f(k) = v(S)$

On a montré que $x \in$ coeur $\Rightarrow x$ appartient à l'ensemble

$$x_0 + x_1 + \cdots + x_K = f(K) \tag{2}$$

$$x_i \geq 0, \quad \forall\, i \tag{3}$$

$$x_i \leq f(K) - f(K-1), \quad i = 1, \ldots, K \tag{5}$$

Montrons la réciproque : soit x dans cet ensemble

Si $0 \notin S$ alors $v(S) = 0$ donc $x(S) \geq v(S)$

Si $0 \in S$ alors $x_i \leq f(K) - f(K-1)\ \forall\, i \in N \backslash S \Rightarrow$
$x(N \backslash S) \leq (K-k)(f(K) - f(K-1))$, où $k = |S| - 1 =$ nb de travailleurs dans S

$$\Rightarrow x(S) \geq f(K) - (K-k)(f(K) - f(K-1)) \overset{\text{concavité}}{\geq} f(k) = v(S)$$

Conclusion : Chaque travailleur reçoit au maximum sa productivité marginale lorsque tous les travailleurs sont employés, et le propriétaire reçoit le reste

Syndicalisation de tous les travailleurs

Syndicalisation de tous les travailleurs

- ➥ Seul le groupe des K travailleurs accepte de travailler

Syndicalisation de tous les travailleurs

➥ Seul le groupe des K travailleurs accepte de travailler

➠ $$v(S) = \begin{cases} f(K) & \text{si } S = N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Syndicalisation de tous les travailleurs

- Seul le groupe des K travailleurs accepte de travailler

  - $$v(S) = \begin{cases} f(K) & \text{si } S = N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ coeur $= \{(x_0, x_1, \ldots, x_K) : x_i \geq 0 \ \forall\, i,\ \sum x_i = f(K)\}$

Principaux défauts de la notion de coeur

Principaux défauts de la notion de coeur

① Souvent trop grand

Principaux défauts de la notion de coeur

① Souvent trop grand

② Souvent vide

Principaux défauts de la notion de coeur

① Souvent trop grand

② Souvent vide

③ Prédictions parfois trop extrêmes et/ou instables

Principaux défauts de la notion de coeur

① Souvent trop grand

② Souvent vide

③ Prédictions parfois trop extrêmes et/ou instables

- Ex : Pas de différence entre dictateur et droit de veto

Principaux défauts de la notion de coeur

① Souvent trop grand

② Souvent vide

③ Prédictions parfois trop extrêmes et/ou instables

- Ex : Pas de différence entre dictateur et droit de veto
- Ex : Jeu des souliers

Principaux défauts de la notion de coeur

① Souvent trop grand

② Souvent vide

③ Prédictions parfois trop extrêmes et/ou instables

- Ex : Pas de différence entre dictateur et droit de veto
- Ex : Jeu des souliers

Le jeu des souliers.

Principaux défauts de la notion de coeur

① Souvent trop grand

② Souvent vide

③ Prédictions parfois trop extrêmes et/ou instables

- Ex : Pas de différence entre dictateur et droit de veto
- Ex : Jeu des souliers

Le jeu des souliers.

2 joueurs, $i = 1, 2$, ont chacun une chaussure gauche

1 joueur, $i = 3$, a une chaussure droite

Principaux défauts de la notion de coeur

① Souvent trop grand

② Souvent vide

③ Prédictions parfois trop extrêmes et/ou instables

- Ex : Pas de différence entre dictateur et droit de veto
- Ex : Jeu des souliers

Le jeu des souliers.

2 joueurs, $i = 1, 2$, ont chacun une chaussure gauche
1 joueur, $i = 3$, a une chaussure droite

$v(S) = 1$ € par paire de chaussures que la coalition S peut réaliser

Coeur :

Coeur :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_i \geq 0, \quad \forall\, i \\ x_1 + x_3 \geq 1 \\ x_2 + x_3 \geq 1 \end{cases}$$

Coeur :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_i \geq 0, \quad \forall\, i \\ x_1 + x_3 \geq 1 \\ x_2 + x_3 \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \text{Coeur} = \{(0,0,1)\}$$

Coeur :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_i \geq 0, \quad \forall\, i \\ x_1 + x_3 \geq 1 \\ x_2 + x_3 \geq 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \ \text{Coeur} = \{(0, 0, 1)\}$$

De même, si

1 000 001 joueurs ont chacun une chaussure gauche

1 000 000 joueurs ont chacun une chaussure droite

Coeur :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_i \geq 0, \quad \forall\, i \\ x_1 + x_3 \geq 1 \\ x_2 + x_3 \geq 1 \end{cases} \qquad \Rightarrow \ \text{Coeur} = \{(0, 0, 1)\}$$

De même, si

1 000 001 joueurs ont chacun une chaussure gauche

1 000 000 joueurs ont chacun une chaussure droite

alors l'unique répartition du coeur donne 1 € à tous ceux qui ont une chaussure droite, et rien à ceux qui ont une chaussure gauche

Coeur :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_i \geq 0, \quad \forall\, i \\ x_1 + x_3 \geq 1 \\ x_2 + x_3 \geq 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{Coeur} = \{(0, 0, 1)\}$$

De même, si

1 000 001 joueurs ont chacun une chaussure gauche

1 000 000 joueurs ont chacun une chaussure droite

alors l'unique répartition du coeur donne 1 € à tous ceux qui ont une chaussure droite, et rien à ceux qui ont une chaussure gauche

➠ Rareté relative (même minime) des chaussures droites $\Rightarrow$ prix nul des chaussures gauches (effet concurrentiel)

Coeur :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_i \geq 0, \quad \forall\, i \\ x_1 + x_3 \geq 1 \\ x_2 + x_3 \geq 1 \end{cases} \qquad \Rightarrow \ \text{Coeur} = \{(0, 0, 1)\}$$

De même, si

1 000 001 joueurs ont chacun une chaussure gauche

1 000 000 joueurs ont chacun une chaussure droite

alors l'unique répartition du coeur donne 1 € à tous ceux qui ont une chaussure droite, et rien à ceux qui ont une chaussure gauche

➠ Rareté relative (même minime) des chaussures droites $\Rightarrow$ prix nul des chaussures gauches (effet concurrentiel)

La valeur de Shapley donne un peu plus que 0.5 aux chaussures droites et un peu moins que 0.5 aux chaussures gauches

Références

Bondareva, O. N. (1963) : "Some Applications of Linear Programming Methods to the Theory of Cooperative Game," Problemi Kibernetiki, 10, 119–139.

Osborne, M. J. et A. Rubinstein (1994) : A Course in Game Theory, Cambridge, Massachusetts : MIT Press.

Shapley, L. S. (1967) : "On Balanced Sets and Cores," Naval Research Logistics Quarterly, 14, 453–460.