Théorie des incitations :
Le modèle principal-agent

Plan

(30 octobre 2006)

1/
- **Introduction**
- **Mécanismes et implémentation : Bref aperçu**
- **Connaissance privée et auto-sélection**
  - Modèle Principal-Agent de base
  - Information complète : optimum de premier rang
  - Information asymétrique : optimum de second rang
  - Rente informationnelle
  - Qualité et discrimination optimale
  - Principe de révélation
  - Variantes et généralisations

- **Action cachée et risque moral**
  - Modèle Principal-Agent de base
  - Contrat optimal en information complète
  - Information asymétrique et neutralité au risque : optimum de premier rang
  - Aversion au risque : arbitrage entre assurance et efficacité
  - Variantes et généralisations

2/
- ☞ Laffont et Martimort (2002) : “*The Theory of Incentives : The Principal-Agent Model*”, chap. 1–4
- ☞ Bolton et Dewatripont (2005) : “*Contract Theory*”, chap. 1–4
- ☞ Fudenberg et Tirole (1991) : “*Game Theory*”, chap. 7
- ☞ Mas-Colell et al. (1995) : “*Microeconomic Theory*”, chap. 14

Introduction

Économie des incitations : Quelles institutions/organisations fournissent aux agents économiques des bonnes incitations à

- étudier, travailler dur
- produire des produits de bonne qualité, innover, ne pas polluer, . . .
- épargner, investir, enchérir, . . .
- acquérir/révéler des informations correctes/complètes ?

3/

Théorie des incitations : englobe

- Théorie des contrats
- Implémentation, "mechanism design"
- Théorie économique de la firme, des institutions

4/

FIG. 1 – Prix Nobel d'économie 2001

5/

FIG. 2 – Jean-Jacques LAFFONT (1947–2004)

Ingrédients de base de la théorie des incitations :
– **conflits d'intérêt**
– **information décentralisée** (asymétrique)
Par exemple, dans une firme, les travailleurs et les directeurs ont des informations et des objectifs différents, pas forcément alignés sur un objectif commun (maximisation du profit)

$\Rightarrow$ différent de la *théorie des équipes* (Marschak et Radner, 1972)

6/

Modèle Principal-Agent : un (ou plusieurs) **principal** délègue une tache à un (ou plusieurs) **agent**. Pourquoi ?

– bénéfices de la division des tâches (rendements croissants)
– manque de temps ou de compétence du principal

Délégation $\Rightarrow$ information privée pour l'agent

Deux types d'information privée :

– **Connaissance privée** ("*adverse selection*") : l'agent a une connaissance sur ses caractéristiques (coûts, préférences, capacités, ...) ignorée par le principal
  Ex : un consommateur (l'agent) avec des préférences privées pour le bien vendu par une entreprise en situation de monopole (le principal) ➠ "discrimination optimale"
  Ex : client / avocat (information = difficulté du cas), employeur / travailleur, vendeur / enchérisseurs, acheteur / vendeur d'une voiture d'occasion

7/

– **Action cachée** (aléa/risque moral) : l'action de l'agent n'est pas observée par le principal
  Ex : comportement caché d'un assuré (l'agent) qui affecte les probabilités des événements assurés par l'assurance (le principal)
  Ex : effort caché d'un cadre (l'agent) qui affecte les profits d'un entrepreneur (le principal)

En général, ces problèmes informationnels ne permettent pas d'allouer les ressources de manière aussi optimale que si toute l'information était connaissance commune

⇒ pour allouer les ressources de manière optimale, le contrat doit faire *révéler des informations* privées à l'agent

8/

⇒ l'agent doit recevoir des *rentes informationnelles*, généralement coûteuses pour le principal

➥ Optimum de second rang

Modèle de signal : connaissance privée également, mais le joueur non-informé ne peut pas s'engager sur la règle de décision / transfert

Mécanismes et implémentation : Bref aperçu

Comment implémenter une certaine allocation des ressources lorsque l'information nécessaire est dispersée dans l'économie ?

$i = 1, \ldots n$ agents

θ_i : *information privée*, *type*, de l'agent i

9/

On cherche à implémenter une allocation

$$y(\underbrace{\theta_1, \ldots, \theta_n}_{\theta})$$

Utilité de l'agent i :

$$u_i(y(\theta), \theta_i)$$

Si θ n'est pas connu par le "centre" (e.g., le gouvernement), alors chaque individu peut être incité à mentir sur son type pour augmenter son utilité (e.g., son allocation privée)

Exemples :

– Production d'un bien public (e.g., un pont). Chaque individu a intérêt à sous-estimer l'utilité qu'il tire de la construction du pont, donc le pont ne pourra pas être construit car coût $> \sum$ utilités révélées

10/ – Implémentation d'un équilibre Walrasien

– Mise en place d'une enchère

– Mécanisme de vote

Dans toutes ces situations, le "centre" fait face à un *problème d'incitation*

Cas particulier : *modèle Principal-Agent*, où centre = Principal, $n = 1$ agent,

$$y(\theta) = (q(\theta), t(\theta))$$

$$u(y(\theta), \theta) = t(\theta) + v(q(\theta), \theta)$$

Conditions d'incitations en stratégies dominantes :

$$u_i(y(\theta_i, \theta_{-i}), \theta_i) \geq u_i(y(\tilde{\theta}_i, \theta_{-i}), \theta_i)$$

pour tout θ_i, $\tilde{\theta}_i$ et θ_{-i}

Conditions d'incitations Bayésiennes : équilibre de Bayes-Nash où tous les joueurs
11/ révèlent la vérité

$$E_{\theta_{-i}} u_i(y(\theta_i, \theta_{-i}), \theta_i) \geq E_{\theta_{-i}} u_i(y(\tilde{\theta}_i, \theta_{-i}), \theta_i)$$

pour tout θ_i et $\tilde{\theta}_i$

Théorème de Gibbard-Satterwaite : Si on ne fait pas de restriction sur les préférences des agents, une allocation $y(\cdot)$ est implémentable en stratégies dominantes si et seulement si elle est **dictatoriale** (c'est-à-dire, maximise l'utilité d'un agent donné)

12/ Comment contourner ce problème d'impossibilité ?

– Utiliser un concept de solution plus faible (e.g., équilibre de Bayes-Nash)
– Restreindre la classe de préférences des agents

Mécanisme de Clarke (1971) – Groves (1973)

Implémente en *stratégies dominantes* l'allocation efficace, lorsque les agents ont des **utilités quasi-linéaires**

$$y(\theta) = (q(\theta), t_1(\theta), \dots, t_n(\theta))$$

13/

$$u_i(y(\theta), \theta_i) = u_i(q(\theta), t_i(\theta), \theta_i) = v_i(q(\theta), \theta_i) + t_i(\theta)$$

Idée : choisir des transferts tels que l'utilité de chaque agent i soit égale au surplus total (à une constante près)

Pour tout θ, soit

$$q(\theta) \in \arg\max_q \underbrace{\sum_{i=1}^n v_i(q, \theta_i)}_{V(q,\theta)} \tag{1}$$

Annonce $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_n)$

$$\Rightarrow \; t_i(\hat{\theta}) = \sum_{j \neq i} v_j(q(\hat{\theta}), \hat{\theta}_j) + \tau_i(\hat{\theta}_{-i})$$

où $\tau_i(\cdot)$ est une fonction quelconque

14/

$$\Rightarrow \; u_i(q(\hat{\theta}), t_i(\hat{\theta}), \theta_i) = \underbrace{v_i(q(\hat{\theta}), \theta_i) + \sum_{j \neq i} v_j(q(\hat{\theta}), \hat{\theta}_j)}_{V(q(\hat{\theta}), \hat{\theta}_{-i}, \theta_i)} + \tau_i(\hat{\theta}_{-i})$$

Annoncer $\hat{\theta}_i = \theta_i$ est une stratégie dominante pour l'agent i car $q(\hat{\theta}_{-i}, \theta_i)$ maximise $V(q, \hat{\theta}_{-i}, \theta_i)$, le surplus total en $(\hat{\theta}_{-i}, \theta_i)$

Application : **Biens publics**

Construction d'un pont, d'une piscine, ...

$q = 1$: construction

$q = 0$: projet abandonné

$i = 1, \ldots, n$ (les agents) :

15/

$$u_i(q, t_i, \theta_i) = t_i + \underbrace{\theta_i q}_{v_i(q,\theta_i)}$$

où θ_i = consentement à payer de i

$i = 0$ (le gouvernement) : $v_0(q, \cdot) = -cq$, où c = coût de construction du bien public

Surplus total :

$$V(q, \theta) = \sum_{i=0}^{n} v_i(q, \theta_i) = \sum_{i=1}^{n} (\theta_i - c)q$$

$$\Rightarrow \quad q(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{i=1}^{n} \theta_i \geq c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

16/

Premier essai.

Si $\sum_{i=1}^{n} \hat{\theta}_i \geq c$ le bien public est produit et chaque agent paye

$$\frac{\hat{\theta}_i}{\sum_{j=1}^{n} \hat{\theta}_j} c$$

- ☞ Non incitatif en stratégies dominantes !
- ☞ En général, non incitatif à un équilibre de Bayes-Nash !

Exemple : $n = 2$, $c = 5$, $\theta_i \in \{2, 4\}$ avec la même probabilité

Supposons que le joueur 1 révèle la vérité. Alors, si $\theta_2 = 4$ et le joueur 2

- Annonce $\hat{\theta}_2 = 4$

$$E_{\theta_1} u_2 = \frac{1}{2}(4 - \frac{4}{4+2}5) + \frac{1}{2}(4 - \frac{4}{4+4}5) = 13/12$$

- Annonce $\hat{\theta}_2 = 2$

$$E_{\theta_1} u_2 = \frac{1}{2}(0) + \frac{1}{2}(4 - \frac{2}{2+4}5) = 14/12$$

$\Rightarrow$ Le joueur 2 dévie en révélant un consentement à payer plus faible que son vrai consentement à payer

Deuxième essai. Un mécanisme de Groves

$\tau_i(\cdot) = 0$

$$\Rightarrow \; t_i(\hat{\theta}) = \begin{cases} \sum_{j \neq i} \hat{\theta}_j - c & \text{si } \sum_{j=1}^{n} \hat{\theta}_j \geq c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans l'exemple précédent, 1 paye $5 - \hat{\theta}_2$ et 2 paye $5 - \hat{\theta}_1$ si $\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 \geq 5$, et 0 sinon. Révéler la vérité est une stratégie dominante

Problème : en général, le budget n'est pas équilibré

Green et Laffont (1977) : En général, les mécanismes de Groves ne permettent pas d'équilibrer le budget (quelles que soient les fonctions τ_i), mais sont les seuls qui permettent une implémentation en stratégie dominante

d'Aspremont et Gérard-Varet (1979) : Mécanismes efficaces, avec budget équilibré, mais implémentation Bayésienne

De plus, l'utilité de réserve des agents doit être supposée arbitrairement faible (on peut forcer les agents à participer)

19/

Laffont et Maskin (1979), Myerson et Satterthwaite (1983) : Si le budget doit être équilibré et si les agents ont une utilité de réservation exogène alors il n'existe pas, en général, de mécanisme efficace satisfaisant les conditions d'incitation Bayésiennes

Connaissance privée : Modèle Principal-Agent de base

➔ Laffont et Martimort (2002, chap. 2–3), Bolton et Dewatripont (2005, chap. 2)

Hypothèses :

– Relation *non répétée* ("*one shot*") entre un principal et un agent
– Il existe un cadre légal permettant de faire respecter le contrat proposé et accepté par l'agent ($\Rightarrow$ possibilité d'*engagement total*)
20/ – Le principal est "*leader de Stackelberg*" : il propose un menu (une liste) de contrats et anticipe que l'agent choisira ensuite le contrat qui maximise l'utilité de l'agent ($\Rightarrow$ on écarte les problèmes de négociation)

Objectif du principal : Caractériser le contrat optimal qu'il doit proposer à l'agent

➥ Maximisation de la fonction objectif du principal sous *contraintes d'incitation et de participation*

Une firme (le principal) délègue la production de $q \in \mathbb{R}_+$ unités de bien à un agent

- **Utilité du principal** (quasi-linéaire)

$$V = S(q) - t$$

où $S' > 0$, $S'' < 0$, $S(0) = 0$ et $t \in \mathbb{R}$ est le **transfert** (paiement) du principal à l'agent

21/

- **Utilité de l'agent** (quasi-linéaire)

$$U = t - C(q, \theta)$$

où $C(q, \theta) = \theta q + F$ est le coût de production de l'agent, $\theta \in \mathbb{R}_{++}$, $F = 0$

– **Contrat (t, q)** : engagement sur un montant de transfert t pour la production de q unités de bien

  – **Information complète** : tous les paramètres sont connaissance commune
  – **Information asymétrique** (simple) : seul l'agent connaît la valeur de θ (son *type*)

Déroulement du jeu de contrat avec connaissance privée :

22/

Période 0	Période 1	Période 2	Période 3
L'agent apprend son type θ	Le principal offre un **menu de contrats** $\{(t, q)\}$	L'agent accepte ou refuse le contrat	Le contrat accepté est exécuté

Le contrat est offert à l'*étape intérim*, une fois que l'agent connaît son type. Sinon, on parle de proposition de contrat à l'*étape ex ante*

Information complète : optimum de premier rang

- Le principal apprend aussi le type θ de l'agent en période 0

23/

$$\boxed{\begin{array}{c}\mathrm{Max}_{(t,q)}\, S(q) - t \\ \text{sous la } \textit{contrainte de participation} \\ t - C(q,\theta) \geq 0\end{array}}$$

(L'utilité de réservation (status quo) de l'agent est supposée indépendante de θ, donc normalisée à 0)

$$\text{C.P.O. : } \begin{cases} S'(q^{FB}) = C'(q^{FB},\theta) = \theta \\ t^{FB} = C(q^{FB},\theta) = q^{FB}\theta \end{cases}$$

Le contrat (q^{FB}, t^{FB}), à prendre ou à laisser par l'agent, est effectivement optimal lorsque le type de l'agent est θ, si (note : S est concave)

$$S(q^{FB}) - t^{FB} = S(q^{FB}) - C(q^{FB},\theta) \geq 0$$

une hypothèse que nous ferons toujours dans la suite

24/ L'agent n'a pas intérêt à refuser (son utilité est égale à son utilité de réservation)

Conclusion. En *information complète*, la délégation n'est pas coûteuse pour le principal, ce qui n'est pas surprenant : il atteint le même niveau d'utilité qu'il aurait eu s'il avait produit lui-même, avec la même fonction de coût que l'agent

- En information complète, le principal a tout le pouvoir de négociation

Remarques. Soient $(\overline{t},\overline{q})$ et $(\underline{t},\underline{q})$ les contrats optimaux pour $\overline{\theta} > \underline{\theta}$. Alors :

– $\boxed{\underline{q} > \overline{q}}$ (car $S' \searrow$ dans CPO) : la production optimale d'un agent efficace (θ faible) est plus grande que celle d'un agent inefficace (θ élevé)

– $\underline{t} - C(\underline{q},\theta) = \boxed{\underline{U} = 0 = \overline{U}} = \overline{t} - C(\overline{q},\theta)$

– $\boxed{\underline{V}} = S(\underline{q}) - \underline{\theta}\underline{q} \equiv \max_q S(q) - \underline{\theta}q > S(\overline{q}) - \underline{\theta}\overline{q} \boxed{>} S(\overline{q}) - \overline{\theta}\overline{q} = \boxed{\overline{V}}$: le profit
25/ du principal est plus important si l'agent est efficace

– Mais $\underline{t} = \underline{\theta}\underline{q}$ peut être plus petit ou plus grand que $\overline{t} = \overline{\theta}\overline{q}$ en fonction de la forme de S :
  – $S(q) = \sqrt{q} \;\Rightarrow\; t = \theta q = S'(q)q = \frac{1}{4\theta}$ décroît avec θ
  – $S(q) = \ln(q) \;\Rightarrow\; t = S'(q)q = 1$ est indépendant de θ
  – $S(q) = \sqrt{\ln(q)} \;\Rightarrow\; t = S'(q)q = \frac{1}{2\sqrt{\ln(q)}}$ croît avec θ

Représentation graphique du contrat optimal en information complète

26/

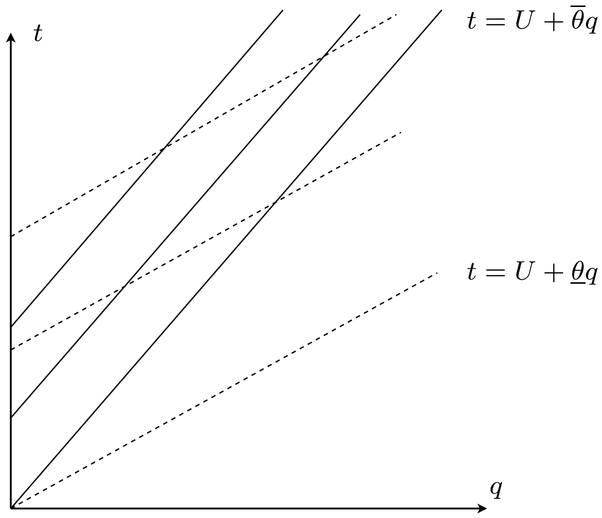

FIG. 3 – Courbes d'indifférence de l'agent vérifiant la propriété de **Spence-Mirless**, ou **single-crossing** : pour deux types différents elles se coupent une seule fois

27/

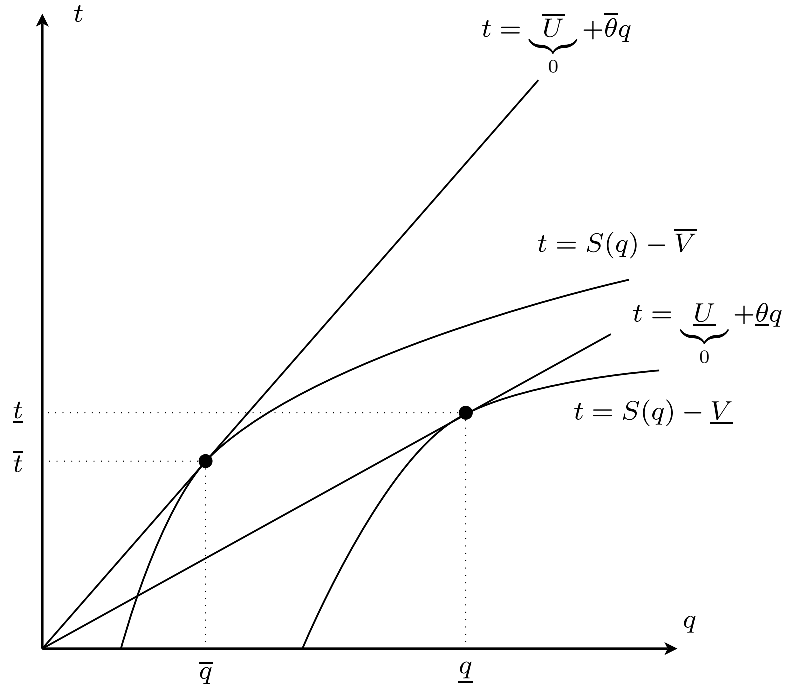

FIG. 4 – Contrat optimal de premier rang

Information asymétrique

➥ Le principal n'observe pas le type θ de l'agent

Supposons $\Theta = \{\underline{\theta}, \overline{\theta}\}$, $\overline{\theta} > \underline{\theta}$, $\Pr[\underline{\theta}] = \nu$

Que se passe-t-il si le principal propose le menu de contrats $\{(\underline{t}, \underline{q}), (\overline{t}, \overline{q})\}$ obtenu en information complète ?

☞ L'*agent efficace* ($\underline{\theta}$) a plutôt intérêt à choisir le contrat destiné à l'*agent*
28/ *inefficace* ($\overline{\theta}$) (Fig 4 : $\underline{\theta}$ préfère $(\overline{t}, \overline{q})$ à $(\underline{t}, \underline{q})$) :

$$(\underline{t}, \underline{q}) \xrightarrow{\underline{\theta}} \underline{t} - C(\underline{q}, \underline{\theta}) = 0$$
$$(\overline{t}, \overline{q}) \xrightarrow{\underline{\theta}} \overline{t} - C(\overline{q}, \underline{\theta}) = \overline{q}\overline{\theta} - \overline{q}\underline{\theta} > 0$$

➡ Le contrat optimal en information complète (“*first best*”) ne peut pas être **implémenté** en information asymétrique car il n'y a **pas d'auto-sélection des contrats** (un type d'agent **imite** un autre type)

Définition. Un menu de contrats $\{(\underline{t},\underline{q}),(\overline{t},\overline{q})\}$ est **incitatif réalisable** s'il vérifie à la fois les contraintes d'auto-sélection et de participation :

– **Contraintes d'auto-sélection** (d'incitations informationnelles) :

$$\underline{U} \equiv \underline{t} - C(\underline{q},\underline{\theta}) \geq \overline{t} - C(\overline{q},\underline{\theta}) \qquad \text{(CI1)}$$
$$\overline{U} \equiv \overline{t} - C(\overline{q},\overline{\theta}) \geq \underline{t} - C(\underline{q},\overline{\theta}) \qquad \text{(CI2)}$$

29/ – **Contraintes de participation** :

$$\underline{t} - C(\underline{q},\underline{\theta}) \geq 0 \qquad \text{(CP1)}$$
$$\overline{t} - C(\overline{q},\overline{\theta}) \geq 0 \qquad \text{(CP2)}$$

Remarque. Les contraintes d'incitation (CI1) et (CI2) impliquent une *contrainte de monotonie* : $\overline{t} \leq \underline{t}$ et $\overline{q} \leq \underline{q}$

Cas particuliers.

- **Menu de contrats mélangeants** (“*pooling*”, “*bunching*”)

➥ Aucune sélection, le même contrat est proposé à tous les types de l'agent : $(\underline{t},\underline{q}) = (\overline{t},\overline{q})$

➡ Plus de contrainte d'auto-sélection, et (CP2) $\Rightarrow$ (CP1)

30/

- **Exclusion du type le plus inefficace**

➥ Sélection extrême, le contrat nul est proposé à l'agent inefficace : $(\overline{t},\overline{q}) = (0,0) \neq (\underline{t},\underline{q}) = (t,q)$

➡ Les contraintes d'incitation deviennent $\underline{\theta}q \leq t \leq \overline{\theta}q$

Rente informationnelle

En information complète, nous avons vu que l'agent avait exactement son utilité de réservation (status quo) quel que soit son type ($\underline{U} = \overline{U} = 0$)

Ceci n'est pas possible en information asymétrique si $\overline{q} > 0$ (c'est-à-dire si le principal veut utiliser les deux types d'agent pour la production) car pour un menu de contrats incitatif, (CI1) implique :

31/

$$\underline{U} \geq \overline{t} - \underline{\theta}\overline{q} = \overline{U} + \overline{q}\Delta\theta > \overline{U} \geq 0$$

Rentes informationnelles de chaque type :

$$\underline{U} \equiv \underline{t} - \underline{\theta}\underline{q}$$
$$\overline{U} \equiv \overline{t} - \overline{\theta}\overline{q}$$

Programme du principal et optimum de second rang

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Max}_{\{(\underline{t},\underline{q}),(\overline{t},\overline{q})\}} \quad \nu(S(\underline{q}) - \underline{t}) + (1-\nu)(S(\overline{q}) - \overline{t}) \\ \text{sous les } \textit{contraintes d'auto-sélection et de participation} \\ \text{(CI1), (CI2), (CP1) et (CP2)} \end{array}}$$

$$\Leftrightarrow \underset{\{(\underline{U},\underline{q}),(\overline{U},\overline{q})\}}{\text{Max}} \underbrace{\nu(S(\underline{q}) - \underline{\theta}\underline{q}) + (1-\nu)(S(\overline{q}) - \overline{\theta}\overline{q})}_{\textit{efficacité d'allocation espérée}} - \underbrace{(\nu\underline{U} + (1-\nu)\overline{U})}_{\textit{rente informationnelle espérée}}$$

32/

sous les contraintes d'auto-sélection

$$\underline{U} \geq \overline{U} + \overline{q}\Delta\theta \qquad \text{(CI1)}$$
$$\overline{U} \geq \underline{U} - \underline{q}\Delta\theta \qquad \text{(CI2)}$$

et les contraintes de participation

$$\underline{U} \geq 0 \qquad \text{(CP1)}$$
$$\overline{U} \geq 0 \qquad \text{(CP2)}$$

Difficulté technique majeure : *quelles contraintes sont saturées* à l'optimum ?

- Commençons par considérer le cas des contrats sans exclusion : $\overline{q} > 0$

Alors, (CP2) et (CI1) $\Rightarrow \underline{U} > 0 \Rightarrow$ (CP1)

Intuitivement, (CI2) est moins contraignante que (CI1) : la difficulté vient du type $\underline{\theta}$ qui veut imiter $\overline{\theta}$, et pas l'inverse (à vérifier a posteriori)

33/

Il reste les contraintes (CI1) et (CP2), qui doivent clairement être saturées :
– Si $\overline{U} > 0$ alors $\overline{U} \searrow$ et $\underline{U} \searrow$ de $\varepsilon \Rightarrow$ gain de ε
– Si $\underline{U} > \overline{U} + \overline{q}\Delta\theta$ alors $\underline{U} \searrow$ de $\varepsilon \Rightarrow$ gain de $\nu\varepsilon$

D'où $\underline{U} = \overline{U} + \overline{q}\Delta\theta = \overline{q}\Delta\theta$ (seul l'agent efficace a une rente informationnelle positive), qu'on intègre dans le programme de maximisation du principal

$$\underset{\{\underline{q},\overline{q}\}}{\text{Max}}\ \nu(S(\underline{q}) - \underline{\theta}\underline{q}) + (1-\nu)(S(\overline{q}) - \overline{\theta}\overline{q}) - \nu\overline{q}\Delta\theta$$

D'où, à l'optimum :

$$\frac{\partial -}{\partial \underline{q}} = \nu(S'(\underline{q}) - \underline{\theta}) = 0$$
$$\frac{\partial -}{\partial \overline{q}} = (1-\nu)(S'(\overline{q}) - \overline{\theta}) - \nu\Delta\theta = 0$$

34/

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} S'(\underline{q}^{SB}) &= \underline{\theta} \\ S'(\overline{q}^{SB}) &= \overline{\theta} + \frac{\nu}{1-\nu}\Delta\theta \end{aligned} \tag{2}$$

Par rapport à la situation d'information complète : $\boxed{\underline{q}^{SB} = \underline{q}^{FB} \text{ et } \overline{q}^{SB} < \overline{q}^{FB}}$

Vérification de la condition (CI2) : $\overline{U} \geq \underline{U} - \underline{q}\Delta\theta \iff \overline{q}^{SB} \leq \underline{q}^{SB}$ ✓

Transferts optimaux associés :

$$\underline{t}^{SB} = \underline{U} + \underline{\theta}\underline{q}^{SB} = \overline{q}^{SB}\Delta\theta + \underline{\theta}\underline{q}^{SB} = \overline{q}^{SB}\Delta\theta + \underbrace{\underline{\theta}\underline{q}^{FB}}_{\underline{t}^{FB}} > \underline{t}^{FB}$$

$$\overline{t}^{SB} = \overline{U} + \overline{\theta}\overline{q}^{SB} = \overline{\theta}\overline{q}^{SB} < \overline{\theta}\overline{q}^{FB} = \overline{t}^{FB}$$

- Contrat avec exclusion : $\overline{q}^{SB} = 0$ est optimal si (2) n'a pas de solution. Dans ce cas, $\underline{U} = \overline{U} = 0$ et $(\underline{t}^{SB}, \underline{q}^{SB}) = (\underline{t}^{FB}, \underline{q}^{FB})$

35/

Conclusion. En information asymétrique, la firme ne maximise plus son profit : l'allocation (valeur sociale de l'échange) est inefficace, mais elle est *optimale étant donné les contraintes informationnelles*

Remarque. Même si l'information privée génère des inefficacités d'allocation, ceci ne signifie pas qu'une *intervention publique* peut améliorer l'allocation car un planificateur ou une autorité publique ferait face aux mêmes contraintes d'incitations

36/

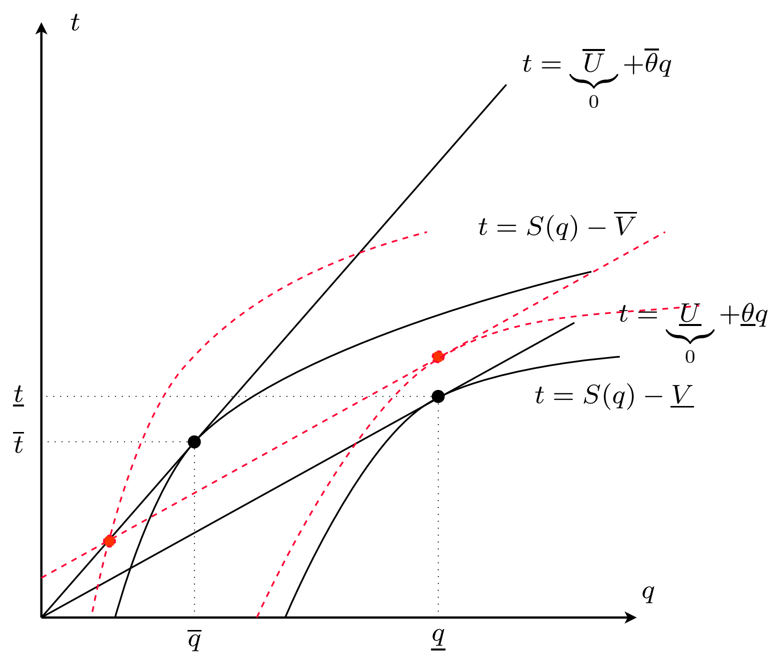

FIG. 5 – Contrat optimal en information asymétrique

Qualité et discrimination optimale

Principal = marchand de vin

Agent = consommateur

Deux types de consommateurs :

- $\theta = \overline{\theta}$: sophistiqué, “riche”
37/
- $\theta = \underline{\theta}$: frugal, “pauvre”

Le principal ne connaît pas θ, et même s'il le connaissait la loi lui interdit de pratiquer des prix non anonymes

$\overline{\theta}$ est prêt à payer + que $\underline{\theta}$ pour une augmentation de la qualité

Le principal peut segmenter le marché en proposant deux types de vin

– Un vin de qualité élevée et à un prix élevé (destiné au consommateur “riche”)
– Un vin de faible qualité et à bas prix (destiné au consommateur “pauvre”)

Comment choisir ces qualités et prix de manière optimale ?

38/ On va voir que le consommateur “pauvre” aura un vin de qualité inférieure à la situation efficace et n'aura aucune rente informationnelle

Au contraire, la qualité du vin du consommateur “riche” ne subit aucune distorsion et le consommateur perçoit une rente informationnelle

Supposons que le consommateur est modéré et ne désire qu'une seule bouteille

Variante du modèle précédent (Mussa et Rosen, 1978; Maskin et Riley, 1984) :

- Un *monopole* (le principal) produit un bien de qualité q, avec un coût c par unité de qualité ; prix p

$$V = p - cq$$

- Les *consommateurs* (l'agent) ont deux types possibles $\underline{\theta}$ (les "pauvres) et $\overline{\theta}$ (les "riches")

$$U = \theta\, v(q) - p$$

où v est strictement croissante et concave et $v(0) = 0$

- *Menu de contrats* :

$$\{(\underline{p}, \underline{q}), (\overline{p}, \overline{q})\}$$

Autre exemple : Chaîne Accor (Formule 1 - Ibis - Mercure - Sofitel . . .)

But du principal : Segmentation de la clientèle en fixant des (prix, qualités) différents

Programme du principal :

$$\underset{\{(\underline{p},\underline{q}),(\overline{p},\overline{q})\}}{\text{Max}} \quad \nu(\underline{p} - c\underline{q}) + (1-\nu)(\overline{p} - c\overline{q})$$

sous les contraintes d'auto-sélection et de participation

$$\underline{\theta}\, v(\underline{q}) - \underline{p} \geq \underline{\theta}\, v(\overline{q}) - \overline{p} \qquad \text{(CI1)}$$

$$\overline{\theta}\, v(\overline{q}) - \overline{p} \geq \overline{\theta}\, v(\underline{q}) - \underline{p} \qquad \text{(CI2)}$$

$$\underline{\theta}\, v(\underline{q}) - \underline{p} \geq 0 \qquad \text{(CP1)}$$

$$\overline{\theta}\, v(\overline{q}) - \overline{p} \geq 0 \qquad \text{(CP2)}$$

On peut montrer, comme dans le modèle précédent, que ces sont les "riches" qui ont plutôt intérêt à choisir le contrat destiné aux "pauvres", et que les contraintes (CI2), (CP1) sont saturées

$$\Rightarrow \quad \underset{\{\underline{q},\overline{q}\}}{\mathrm{Max}}\ \nu(\underline{\theta}\, v(\underline{q}) - c\underline{q}) + (1-\nu)(\overline{\theta}(v(\overline{q}) - v(\underline{q})) + \underline{\theta}\, v(\underline{q}) - c\overline{q})$$

41/

CPO :

$$\underline{\theta}\, v'(\underline{q}) = c + \frac{1-\nu}{\nu}\Delta\theta\, v'(\underline{q}) > c \qquad (3)$$

$$\overline{\theta}\, v'(\overline{q}) = c \qquad (4)$$

(4) : Pour les "riches", utilité marginale de la qualité = coût marginal de la qualité (1er rang)

42/ (3) : Pour les "pauvres", distorsion de la qualité (2nd rang). $\underline{\theta}\, v'(\underline{q}) > c \Rightarrow$ la qualité offerte aux pauvres est en dessous de celle qu'ils devraient avoir en information complète

➡ L'ensemble des qualités proposées en information incomplète est plus large qu'en information complète

De plus, comme (CP1) est saturée, mais pas (CP2), on a

$$\underline{p} = \underline{\theta}\, v(\underline{q})$$
$$\overline{p} < \overline{\theta}\, v(\overline{q})$$

➡ Le monopole s'approprie l'intégralité du surplus des plus "pauvres", alors que les "riches" ont une rente informationnelle

43/

Le principe de révélation

(Gibbard, 1973; Green et Laffont, 1977; Myerson, 1979)

Le principal peut-il faire des profits plus élevés

1. en proposant des menus de contrats plus complexes, avec plus d'options que de types possibles de l'agent ?
2. en communicant avec l'agent avant de lui proposer le menu de contrats ?
3. sans forcément l'inciter à révéler toute son information ?

44/

Principe de révélation : NON, sans perte de généralité, on peut considérer des menus de contrats simples, sans communication additionnelle, où le nombre d'options est égal au nombre de types possibles de l'agent, et où l'agent de type θ choisit le contrat $(t(\theta), q(\theta))$ qui lui est destiné

Idée de preuve : On remarque qu'un menu de contrats (simple) optimal est équivalent à un *mécanisme de révélation direct*, incitatif, où l'agent révèle son vrai type à l'agent

45/

$$\theta \mapsto (t(\theta), q(\theta))$$

On montre ensuite que tout mécanisme général

$$\begin{aligned} \widetilde{g} : \mathcal{M} &\to \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \\ m &\mapsto (\widetilde{t}(m), \widetilde{q}(m)) \end{aligned}$$

incitatif est équivalent à un mécanisme de révélation direct

$$\begin{aligned} g : \Theta &\to \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \\ \theta &\mapsto (t(\theta), q(\theta)) \end{aligned}$$

46/ où chaque type révèle son vrai type au principal

Comment ? On construit g à partir de $\widetilde{g}$ de la manière suivante :

Soit $m^* : \Theta \to \mathcal{M}$ la stratégie de l'agent avec le mécanisme $\widetilde{g}$

➥ alors, $g = \widetilde{g} \circ m^*$

$$\begin{tikzcd}
\Theta \arrow[r, "m^*(\cdot)"] \arrow[rr, bend right, "g(\cdot) = \widetilde{g} \circ m^*(\cdot)"'] & M \arrow[r, "\widetilde{g}(\cdot)"] & \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

47/

Clairement, on génère la même allocation, et révéler la vérité, $m(\theta) = \theta$, est optimal pour l'agent dans le nouveau mécanisme ■

Variantes et généralisations

Fonctions d'utilité de l'agent plus générales

Les propriétés du contrat optimal de second rang restent vraies pour des fonctions d'utilité de l'agent plus générales

$$U = t - C(q, \theta)$$

48/

dès lors que $C_q > 0$, $C_\theta > 0$, $C_{qq} > 0$ et que la **condition de Spence-Mirrlees** est satisfaite :

$$C_{q\theta} > 0$$

➥ Les types de l'agent ont des courbes d'indifférence qui se coupent une seule fois

➥ Un type plus efficace a également une efficacité marginale plus élevée

En particulier :

- La production de l'agent efficace est la même qu'en information complète
- La production de l'agent inefficace est plus faible qu'en information complète
- Seul l'agent efficace reçoit une rente informationnelle

Contrainte de participation ex-ante

Si le principal offre son menu de contrats avant que l'agent obtienne son information (apprend son type θ), on remplace les **contraintes de participation interim**

$$\underline{U} \geq 0 \qquad \overline{U} \geq 0$$

par une **contrainte de participation ex-ante** :

$$\nu \underline{U} + (1-\nu)\overline{U} \geq 0$$

Proposition. *Si l'agent est* neutre au risque *et le contrat est proposé ex-ante, alors le principal peut implémenter l'optimum de premier rang avec, par exemple,*

$$\underline{U} = (1-\nu)\Delta\theta \overline{q}^{FB} > 0$$
$$\overline{U} = -\nu \Delta\theta \overline{q}^{FB} < 0$$

Remarque. $\overline{U} < 0$, donc ceci requière que la tierce partie puisse imposer un paiement négatif à l'agent lorsque $\theta = \underline{\theta}$

Proposition. *Si l'agent est* averse au risque, *l'optimum de premier rang ne peut plus être atteint. Comme pour le contrat interim, le type inefficace produit moins* ($\overline{q}^{SB} < \overline{q}^{FB}$) *et*

$$\underline{U}^{SB} > 0 > \overline{U}^{SB}$$

Remarque. L'aversion au risque ne joue aucun rôle avec des contrats interim

51/

Continuum de types de l'agent (Baron et Myerson, 1982)

$$\Theta = [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$$

Fonction de densité $f(\theta) > 0$

Fonction de répartition $F(\theta)$

Le principe de révélation s'applique comme précédemment

$\Rightarrow$ Mécanisme de révélation direct $\{(q(\theta), t(\theta))\}$ tel que l'agent θ a toujours intérêt à révéler son vrai type :

$$t(\theta) - \theta q(\theta) \geq t(\theta') - \theta q(\theta'), \quad \forall\ (\theta, \theta') \in \Theta^2 \tag{5}$$

On peut montrer que $t(\cdot)$ et $q(\cdot)$ différentiables. Alors, CPO :

52/

$$\dot{t}(\theta) - \theta \dot{q}(\theta) = 0 \tag{6}$$

Condition de second ordre locale :

$$\ddot{t}(\theta) - \theta \ddot{q}(\theta) \leq 0 \tag{7}$$

On dérive (6) $\Rightarrow \ddot{t}(\theta) - \theta \ddot{q}(\theta) - \dot{q}(\theta) = 0$ donc (7) $\Leftrightarrow$

$$\dot{q}(\theta) \leq 0, \quad \text{i.e., la fonction de production est décroissante} \tag{8}$$

Condition de second ordre globale : (5). De (6) on a :

$$
\begin{aligned}
t(\theta) - t(\theta') &= \int_{\theta'}^{\theta} \dot{t}(\tau)\, d\tau = \int_{\theta'}^{\theta} \tau \dot{q}(\tau)\, d\tau \\
&= \int_{\theta'}^{\theta} [\tau q(\tau) - Q(\tau)]'\, d\tau = [\tau q(\tau)]_{\theta'}^{\theta} - \int_{\theta'}^{\theta} q(\tau)\, d\tau \\
&= \theta q(\theta) - \theta' q(\theta') - \int_{\theta'}^{\theta} q(\tau)\, d\tau
\end{aligned}
$$

53/ D'où

$$
\begin{aligned}
t(\theta) - \theta q(\theta) &= t(\theta') - \theta' q(\theta') - \int_{\theta'}^{\theta} q(\tau)\, d\tau \\
&= t(\theta') - \theta q(\theta') + \underbrace{(\theta - \theta')q(\theta') - \int_{\theta'}^{\theta} q(\tau)\, d\tau}_{\geq 0 \text{ car } q \nearrow}
\end{aligned}
$$

donc la CSO globale est satisfaite

Programme du principal :

$(U(\theta) = t(\theta) - \theta q(\theta)$, $\dot{U}(\theta) = \dot{t}(\theta) - \theta \dot{q}(\theta) - q(\theta))$

$$
\underset{U(\cdot), q(\cdot)}{\text{Max}} \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} (S(q(\theta)) - U(\theta) - \theta q(\theta)) f(\theta)\, d\theta
$$

s.l.c.

54/

(6) $\Leftrightarrow \dot{U}(\theta) = -q(\theta)$

(8) : $\dot{q}(\theta) \leq 0$

(CP) : $U(\theta) \geq 0 \Leftrightarrow U(\overline{\theta}) \geq 0$ (car $\dot{U}(\theta) = -q(\theta) < 0$)

(CP) doit clairement être saturée

On a $\dot{U}(\theta) = -q(\theta) \Rightarrow \underbrace{U(\overline{\theta})}_{=0} - U(\theta) = -\int_{\theta}^{\overline{\theta}} q(\tau)\, d\tau$, d'où

$$\underset{q(\cdot)}{\mathrm{Max}} \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \left(S(q(\theta)) - \theta q(\theta) - \int_{\theta}^{\overline{\theta}} q(\tau)\, d\tau \right) f(\theta)\, d\theta$$

On a (intégration par parties) :

55/

$$\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \left(\underbrace{\int_{\theta}^{\overline{\theta}} q(\tau)\, d\tau}_{u} \right) \underbrace{f(\theta)}_{v'}\, d\theta = [uv]_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} - \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} u'v\, d\theta$$

$$= \underbrace{[F(\theta) \int_{\theta}^{\overline{\theta}} q(\tau)\, d\tau]_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}}}_{0} - \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} (-q(\theta))F(\theta)\, d\theta = \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} q(\theta)F(\theta)\, d\theta$$

D'où

$$\underset{q(\cdot)}{\mathrm{Max}} \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \left(S(q(\theta)) - \theta q(\theta) - \frac{q(\theta)F(\theta)}{f(\theta)} \right) f(\theta)\, d\theta$$

Maximisation point par point $\Rightarrow$

$$\boxed{S'(q(\theta)) = \theta + \frac{F(\theta)}{f(\theta)}}$$

56/

ce qui généralise (2) au cas continu

Propriété du **taux de hasard croissant** : $\frac{F(\theta)}{f(\theta)}$ croissant

Cette propriété est vérifiée pour beaucoup de distributions usuelles, notamment unimodales, e.g., uniforme, normale, ...

– Si la propriété du taux de hasard croissant est vérifiée alors $q(\theta)$ est bien décroissante (**séparation totale**)
– Sinon, le contrat est non révélateur ("**bunching**") : $q(\theta)$ est constante sur un
57/ intervalle de types de l'agent

Comme dans le cas à deux types, pas de distorsion pour le type le plus efficace ($\underline{\theta}$), et une distorsion vers le bas pour tous les autres types

Types partiellement vérifiables. Voir Green et Laffont (1986)

Références

Baron, D. P. et R. B. Myerson (1982) : "Regulating a monopolist with unknown costs," *Econometrica*, 50, 911–930.

Bolton, P. et M. Dewatripont (2005) : *Contract Theory*, MIT Press.

Clarke, E. (1971) : "Multipart Pricing of Public Goods," *Public Choice*, 8, 19–33.

d'Aspremont, C. et L.-A. Gérard-Varet (1979) : "Incentives and Incomplete Information," *Journal of Public Economics*, 11, 25–45.

Fudenberg, D. et J. Tirole (1991) : *Game Theory*, MIT Press.

58/ Gibbard, A. (1973) : "Manipulation of voting schemes : a general result," *Econometrica*, 41, 587–601.

Green, J. et J.-J. Laffont (1977) : "Characterization of satisfactory mechanisms for the revelation of preferences for public goods," *Econometrica*, 45, 427–438.

Green, J. R. et J.-J. Laffont (1986) : "Partially Verifiable Information and Mechanism Design," *Review of Economic Studies*, 53, 447–456.

Groves, T. (1973) : "Incentives in Teams," *Econometrica*, 41, 617–631.

Laffont, J.-J. et D. Martimort (2002) : *The Theory of Incentives : The Principal-Agent Model*, Princeton University Press.

Laffont, J.-J. et E. Maskin (1979) : "A Differential Approach to Expected Utility Maximizing Mechanisms," dans *Aggregation and Revelation of Preferences*, ed. par J.-J. Laffont, North-Holland.

MARSCHAK, J. ET R. RADNER (1972) : *Economic Theory of Teams*, New Haven and London, Yale University Press.

MAS-COLELL, A., M. D. WHINSTON, ET J. R. GREEN (1995) : *Microeconomic Theory*, New York : Oxford University Press.

MASKIN, E. ET J. RILEY (1984) : "Monopoly with incomplete information," *Rand J. Econom.*, 15, 171–196.

MUSSA, M. ET S. ROSEN (1978) : "Monopoly and product quality," *J. Econom. Theory*, 18, 301–317.

MYERSON, R. ET M. SATTERTHWAITE (1983) : "Efficient Mechanisms for Bilateral Trading," *Journal of Economic Theory*, 28, 265–281.

MYERSON, R. B. (1979) : "Incentive compatibility and the bargaining problem," *Econometrica*, 47, 61–73.