Action cachée et risque moral

(30 octobre 2006)

Situation de "risque moral" / action cachée = situation dans laquelle un principal délègue une action à un agent avec des préférences différentes

- Cette action (e.g., un niveau d'effort) affecte les performances de l'agent
- Cette action n'est ni observable par le principal, ni par la tierce partie (la cour) qui se charge de l'application du contrat

1/ Exemples :

- la prudence d'un assuré qui affecte la probabilité d'accident
- l'investissement d'une firme régulée pour réduire ses coûts de production d'un bien public

⇒ Contrairement au cas de connaissance privée, les asymétries d'information apparaissent *après* la signature du contrat, et l'incertitude est endogène : les probabilités des états de la nature (les performances) dépendent du niveau d'effort de l'agent

Si les actions de l'agent ne sont pas observables et s'il est assuré contre les mauvais états de la nature, il risque d'être imprudent ou de fournir trop peu d'effort

Peltzam (1975) : Une des premières et plus surprenante étude empirique des incidences du "risque moral". Les lois qui rendent obligatoire le port de la ceinture ont augmenté la vitesse moyenne des automobilistes et ont eu une incidence négative sur les accidents (notamment avec les piétons)

2/ ➥ Pour contourner ce problème,

- l'assurance doit demander plus si l'agent veut une meilleure couverture
- l'employeur doit mieux rémunérer les bonnes performances
- ...

Contrat proposé par le principal : rémunération qui dépend uniquement de la performance / production observable de l'agent, et non de son niveau d'effort

Contrat incitatif réalisable :

1. Contrainte d'incitation
2. Contrainte de participation

Modèle de base

3/

L'agent choisit un niveau d'**effort** $e \in \{0, 1\}$

Désutilité de l'effort pour l'agent : $\psi(0) = 0$ et $\psi(1) = \psi$

Utilité séparable de l'agent :

$$U = u(t) - \psi(e)$$

où $t =$ **transfert** monétaire du principal à l'agent, et $u' > 0$, $u'' < 0$

Le niveau de **production** (**performance**) $\tilde{q}$ peut prendre deux valeurs, $\underline{q}$ et $\overline{q}$, avec $\Delta q = \overline{q} - \underline{q} > 0$ et

$$\Pr(\tilde{q} = \overline{q} \mid e = 0) = \pi_0$$
$$\Pr(\tilde{q} = \overline{q} \mid e = 1) = \pi_1$$

où $\Delta\pi = \pi_1 - \pi_0 > 0$

4/

➥ $\boxed{\text{Performance = Effort + Aléa}}$

Contrat : Fonction qui à tout niveau de production $\tilde{q}$ de l'agent associe un transfert $t(\tilde{q})$. Ici deux outputs seulement $\Rightarrow$ $(\underline{t}, \overline{t})$

Utilité espérée du principal, en fonction de l'effort $e \in \{0, 1\}$:

$$V_e = \pi_e(S(\overline{q}) - \overline{t}) + (1 - \pi_e)(S(\underline{q}) - \underline{t})$$

5/

On note $S(\overline{q}) = \overline{S}$ et $S(\underline{q}) = \underline{S}$

Contrat incitatif réalisable :

Contrainte d'incitation de l'agent :

$$\pi_1 u(\overline{t}) + (1 - \pi_1)u(\underline{t}) - \psi \geq \pi_0 u(\overline{t}) + (1 - \pi_0)u(\underline{t}) \qquad \text{(CI)}$$

Contrainte de participation de l'agent :

$$\pi_1 u(\overline{t}) + (1 - \pi_1)u(\underline{t}) - \psi \geq 0 \qquad \text{(CP)}$$

6/

Déroulement du jeu de contrat avec action cachée

Période 0	Période 1	Période 2	Période 3	Période 4
Le principal offre un contrat $(\underline{t}, \overline{t})$	L'agent accepte ou refuse le contrat	L'agent exerce un effort $e \in \{0, 1\}$	La production $\tilde{q}$ est réalisée	Le contrat accepté est exécuté

Contrat optimal en information complète

Le principal et la tierce partie (la cour) peuvent observer et vérifier l'effort de l'agent

$\Rightarrow$ Le niveau d'effort peut être inclus dans le contrat

Problème du principal :

7/

$$\boxed{\begin{array}{c}\mathrm{Max}_{(\underline{t},\overline{t})}\ \pi_1(\overline{S}-\overline{t})+(1-\pi_1)(\underline{S}-\underline{t})\\ \text{sous la contrainte de participation (CP)}\end{array}}$$

En effet, si l'agent ne fournit pas d'effort, ceci est observable $\Rightarrow$ il reçoit 0 donc ici (CI) $\Leftrightarrow$ (CP)

$$\mathcal{L} = \pi_1(\overline{S}-\overline{t})+(1-\pi_1)(\underline{S}-\underline{t})+\mu[\pi_1 u(\overline{t})+(1-\pi_1)u(\underline{t})-\psi]$$

CPO :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{t}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overline{t}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -\pi_1 + \mu\pi_1 u'(\overline{t}^*) = 0 \\ -(1-\pi_1)+\mu(1-\pi_1)u'(\underline{t}^*) = 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{1}{u'(\overline{t}^*)} = \frac{1}{u'(\underline{t}^*)} > 0 \Rightarrow \underline{t}^* = \overline{t}^* = t^* = u^{-1}(\psi) \equiv h(\psi)$$

car la contrainte (CP) est saturée

8/

$\Rightarrow$ Lorsque l'effort est observable, l'agent obtient une "assurance totale" du principal

Paiement du principal s'il induit l'effort $e = 1$:

$$V_1 = \pi_1 \overline{S} + (1 - \pi_1)\underline{S} - h(\psi)$$

s'il avait laissé l'agent fournir aucun effort :

$$V_0 = \pi_0 \overline{S} + (1 - \pi_0)\underline{S}$$

Donc inciter l'agent à fournir l'effort est optimal si

9/

$$V_1 \geq V_0 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\Delta\pi\Delta S \equiv B}_{\text{Gain espéré de l'effort}} \quad \geq \quad \underbrace{h(\psi) \equiv C^{FB}}_{\text{Coût de 1er rang à inciter à l'effort}}$$

Information asymétrique et neutralité au risque : Optimum de premier rang

$u(t) = t$, $h(u) = u$

Problème du principal :

10/

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Max}_{(\underline{t},\overline{t})}\ \pi_1(\overline{S} - \overline{t}) + (1 - \pi_1)(\underline{S} - \underline{t}) \\ \text{sous les contraintes} \\ \text{(CI)} \quad \pi_1\overline{t} + (1 - \pi_1)\underline{t} - \psi \geq \pi_0\overline{t} + (1 - \pi_0)\underline{t} \\ \text{(CP)} \quad \pi_1\overline{t} + (1 - \pi_1)\underline{t} - \psi \geq 0 \end{array}}$$

L'optimum est atteint pour le principal dès lors que (CP) est saturée et (CI) est satisfaite. Si, par exemple, on considère les transferts qui saturent les deux contraintes, on obtient :

$$\underline{t}^* = -\frac{\pi_0}{\Delta\pi}\psi \quad \text{et} \quad \overline{t}^* = \frac{1 - \pi_0}{\Delta\pi}\psi$$

Dans ce cas, le principal paye en moyenne $\pi_1 \bar{t}^* + (1-\pi_1)\underline{t}^* = \psi = C^{FB}$, i.e., exactement la désutilité qu'il subirait s'il contrôlait parfaitement le niveau d'effort

Conclusion. *Lorsque l'agent est neutre au risque, le "risque moral" (le fait que l'effort ne soit pas observable) n'est pas un problème. La délégation n'est pas coûteuse pour le principal, qui arrive à implémenter l'optimum de premier rang*

Utilités associées de l'agent :

11/

- Récompense $\bar{t}^* - \psi = \frac{1-\pi_1}{\Delta\pi}\psi > 0$ si la production est élevée
- Punition $\underline{t}^* - \psi = -\frac{\pi_1}{\Delta\pi}\psi < 0$ si la production est faible

Aversion au risque : Arbitrage entre assurance et efficacité

$u(t)$ strictement concave

Problème du principal :

12/

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathrm{Max}_{(\underline{t},\bar{t})}\ \pi_1(\bar{S}-\bar{t}) + (1-\pi_1)(\underline{S}-\underline{t}) \\ \text{sous les contraintes} \\ \text{(CI)} \quad \pi_1 u(\bar{t}) + (1-\pi_1)u(\underline{t}) - \psi \geq \pi_0 u(\bar{t}) + (1-\pi_0)u(\underline{t}) \\ \text{(CP)} \quad \pi_1 u(\bar{t}) + (1-\pi_1)u(\underline{t}) - \psi \geq 0 \end{array}}$$

Pour s'assurer que ce programme d'optimisation soit bien concave on fait le changement de variable $\bar{u} = u(\bar{t})$ et $\underline{u} = u(\underline{t})$ ou, de manière équivalente, $\bar{t} = h(\bar{u})$ et $\underline{t} = h(\underline{u})$

Le programme d'optimisation devient

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Max}_{(\overline{u},\underline{u})}\ \pi_1(\overline{S}-h(\overline{u}))+(1-\pi_1)(\underline{S}-h(\underline{u})) \\ \text{sous les contraintes} \\ \text{(CI)}\quad \pi_1\overline{u}+(1-\pi_1)\underline{u}-\psi \geq \pi_0\overline{u}+(1-\pi_0)\underline{u} \\ \text{(CP)}\quad \pi_1\overline{u}+(1-\pi_1)\underline{u}-\psi \geq 0 \end{array}}$$

qui est bien concave (contraintes linéaires et fonction objectif strictement concave
13/ car $h = u^{-1}$ strictement convexe)

En notant λ et μ les multiplicateurs associés aux contraintes (CI) et (CP) on obtient les CPO :

$$-\pi_1 h'(\overline{u}) + \lambda\Delta\pi + \mu\pi_1 = 0 \qquad (1)$$

$$-(1-\pi_1)h'(\underline{u}) - \lambda\Delta\pi + \mu(1-\pi_1) = 0 \qquad (2)$$

d'où

$$\mu = \frac{1}{u'(\overline{t})} - \lambda\frac{\Delta\pi}{\pi_1} = \frac{1}{u'(\underline{t})} + \lambda\frac{\Delta\pi}{1-\pi_1} \qquad (3)$$

$$\Rightarrow \quad \mu = \pi_1 \times (-) + (1-\pi_1)\times(-) = \frac{\pi_1}{u'(\overline{t})} + \frac{1-\pi_1}{u'(\underline{t})} > 0$$

donc (CP) est saturée

De même, on a

14/
$$\lambda = \frac{\pi_1}{u'(\overline{t})\Delta\pi} - \mu\frac{\pi_1}{\Delta\pi} = -\frac{1-\pi_1}{u'(\underline{t})\Delta\pi} + \mu\frac{1-\pi_1}{\Delta\pi} \qquad (4)$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = (1-\pi_1)\times(-) + \pi_1\times(-) = \frac{\pi_1(1-\pi_1)}{\Delta\pi}\left(\frac{1}{u'(\overline{t})} - \frac{1}{u'(\underline{t})}\right)$$

Or, (CI) $\Rightarrow \overline{u} - \underline{u} \geq \frac{\psi}{\Delta\pi} > 0 \Rightarrow \overline{t} > \underline{t} \Rightarrow \lambda > 0 \Rightarrow$ (CI) est saturée

Il suffit donc de résoudre (CI) et (CP) à l'égalité. On obtient

$$\begin{aligned} \overline{u} - \underline{u} &= \frac{\psi}{\Delta\pi} \\ \pi_1 \overline{u} + (1-\pi_1)\underline{u} &= \psi \end{aligned}$$

15/
$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad \overline{u} &= \psi + (1-\pi_1)\frac{\psi}{\Delta\pi} \\ \underline{u} &= \psi - \pi_1 \frac{\psi}{\Delta\pi} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \overline{t} &= h\left(\psi + (1-\pi_1)\frac{\psi}{\Delta\pi}\right) \\ \underline{t} &= h\left(\psi - \pi_1 \frac{\psi}{\Delta\pi}\right) \end{aligned}$$

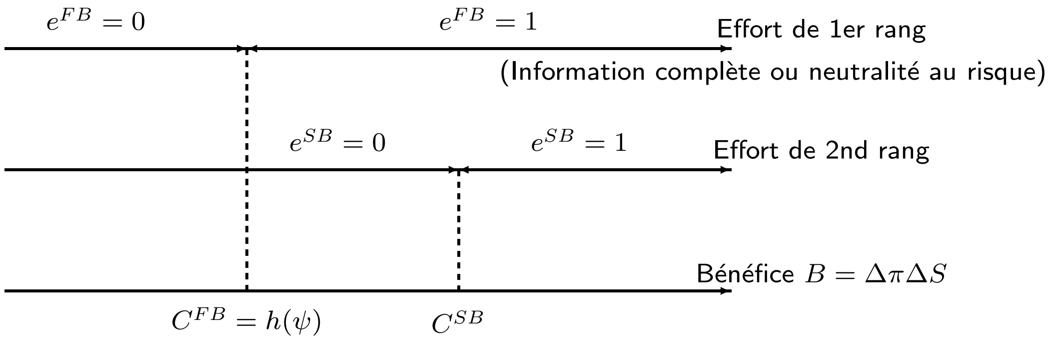
Conclusion.

- Contrairement au cas où l'information est complète, l'agent averse au risque n'est pas totalement assuré : $\overline{t} > \underline{t}$
- Par rapport au cas où l'information est complète, l'agent reçoit plus lorsqu'il est performant et moins lorsqu'il n'est pas performant : $\overline{t} > t^* = h(\psi)$ et $\underline{t} < t^* = h(\psi)$
- L'agent averse au risque touche une **prime de risque** : il reçoit plus (le coût
16/ pour le principal, C^{SB}, est plus élevé), en moyenne, qu'à l'optimum de premier rang, C^{FB} (neutralité au risque ou information complète). En effet, (CP) saturée donne :

$$\begin{aligned} & \pi_1 u(\overline{t}) + (1-\pi_1)u(\underline{t}) = \psi \\ \Rightarrow \quad & h(-) = h(\psi) \\ \Rightarrow \quad & \underbrace{\pi_1 \overline{t} + (1-\pi_1)\underline{t}}_{C^{SB}} > \underbrace{h(\psi)}_{C^{FB}} \quad \text{(Jensen, car } h \text{ convexe)} \end{aligned}$$

- Le principal induit un effort positif moins souvent qu'à l'optimum de premier rang :

17/



$\Rightarrow$ Arbitrage entre induire un effort élevé et procurer une assurance à l'agent

La différence $AC \equiv C^{SB} - C^{FB}$ est appelé **coût d'agence** pour le principal

Un exemple.

$$u(x) = \frac{-1 + \sqrt{1 + 2rx}}{r} \quad \Leftrightarrow \quad h(u) = u + \frac{ru^2}{2}$$

Remarque : Degré d'aversion absolue au risque, $-u''(x)/u'(x) = \frac{r}{1+2rx}$ décroissant avec x, et égal à r en $x = 0$

18/

$$\begin{aligned}
C^{SB} &= \pi_1 \bar{t} + (1 - \pi_1)\underline{t} \\
&= \pi_1 h\left(\psi + (1 - \pi_1)\frac{\psi}{\Delta\pi}\right) + (1 - \pi_1) h\left(\psi - \pi_1 \frac{\psi}{\Delta\pi}\right) \\
&= \psi + \pi_1 \frac{r}{2}(\psi + (1 - \pi_1)\frac{\psi}{\Delta\pi})^2 + (1 - \pi_1)\frac{r}{2}(\psi - \pi_1\frac{\psi}{\Delta\pi})^2 \\
&= \psi + \frac{r\psi^2}{2} + \frac{\pi_1(1 - \pi_1) r\psi^2}{2(\Delta\pi)^2}
\end{aligned}$$

$$C^{FB} = h(\psi) = \psi + \frac{r\psi^2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad AC = C^{SB} - C^{FB} = \frac{\pi_1(1-\pi_1)r\psi^2}{2(\Delta\pi)^2}$$

Donc le coût d'agence augmente avec

19/

- Le degré d'aversion pour le risque de l'agent, r
- Le coût de l'effort, ψ
- Le degré d'asymétrie d'information, $\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{(\Delta\pi)^2}$

Variantes et généralisations

Responsabilité limitée

Supposons que l'agent est neutre au risque mais a les contraintes

$$\underline{t} \geq -l \qquad\qquad \overline{t} \geq -l$$

où $l \geq 0$ est exogène

20/ Dans ce cas on montre que

- Si $l > \frac{\pi_0}{\Delta\pi}\psi$, alors le principal implémente l'optimum de premier rang
- Si $0 \leq l \leq \frac{\pi_0}{\Delta\pi}\psi$, alors $\underline{t} = -l$, $\overline{t} = -l + \frac{\psi}{\Delta\pi}$ et l'agent obtient une **rente de responsabilité limitée**

$$\pi_1\overline{t} + (1-\pi_1)\underline{t} - \psi = -l + \frac{\pi_0}{\Delta\pi}\psi \geq 0$$

➡ Le coût à induire l'effort, $\pi_1\bar{t} + (1-\pi_1)\underline{t}$, est supérieur au coût de 1er rang (ψ), donc comme dans le cas d'aversion pour le risque le principal choisit d'induire un effort élevé moins souvent qu'à l'optimum de 1er rang

➡ Arbitrage entre induire un effort élevé et laisser une rente de responsabilité limitée à l'agent

21/ **Application** : Modèles de salaire d'efficience. L'agent (le travailleur) ne peut pas être puni pour une mauvaise performance, donc $l = 0$

- $\bar{t} = \frac{\psi}{\Delta\pi} =$ **salaire d'efficience**
- Pour produire, la firme doit laisser une part positive des profits de la firme au travailleur

Plus de deux niveaux de performance

Toujours deux niveaux d'effort possibles, $e \in \{0, 1\}$, mais $n \geq 2$ niveaux de performance

$$q_1 < \cdots < q_i < \cdots q_n$$

22/

$$\pi_{ie} = \Pr(q_i \mid e) > 0, \quad \forall\, i,\ \forall\, e$$

Définition. (Milgrom, 1981) Les probabilités de succès vérifient la propriété de rapport de vraisemblance croissant (**Monotone Likelihood Ratio Property**, MLRP) si

$$\frac{\pi_{i1}}{\pi_{i0}} \text{ est croissante avec } i$$

- Lorsque $n = 2$ on retrouve la condition $\pi_1 \geq \pi_0$

- On a

$$\frac{\pi_{i1}}{\pi_{i0}} = \frac{\Pr(q_i \mid e = 1)}{\Pr(q_i \mid e = 0)} = \frac{\Pr(e = 1 \mid q_i)/\Pr(e = 1)}{\Pr(e = 0 \mid q_i)/\Pr(e = 0)}$$

23/ donc MLRP $\Leftrightarrow$ $\Pr(e = 1 \mid q_i)$ croissant avec i

➡ Sous MLRP, quand le principal observe une performance plus grande, sa croyance sur le fait que l'agent a fourni un effort élevé augmente

Remarque. MLRP est une propriété plus forte que la dominance stochastique de premier ordre, selon laquelle la fonction de répartition de $q \mid (e = 1)$ est sous celle de $q \mid (e = 0)$

$$\text{DS1 } (n = 3) \quad \pi_{11} \leq \pi_{10} \tag{5}$$

$$\pi_{11} + \pi_{21} \leq \pi_{10} + \pi_{20} \tag{6}$$

24/

$$\text{MLRP } (n = 3) \quad \frac{\pi_{31}}{\pi_{30}} \geq \frac{\pi_{21}}{\pi_{20}} \geq \frac{\pi_{11}}{\pi_{10}}$$

MLRP $\Rightarrow \frac{\pi_{11}}{\pi_{10}} \leq 1$, donc (5). Sinon, on aurait $\pi_{11} > \pi_{10}$, $\pi_{21} > \pi_{20}$, et $\pi_{31} > \pi_{30}$, impossible car $\sum_i \pi_{i\cdot} = 1$

MLRP $\Rightarrow \frac{\pi_{31}}{\pi_{30}} \geq 1$, donc (6). Sinon, on aurait $\pi_{11} < \pi_{10}$, $\pi_{21} < \pi_{20}$, et $\pi_{31} < \pi_{30}$, impossible

Ici, contrat = vecteur de transferts $(t_1, \ldots, t_n)$

Proposition. *Si la probabilité de succès satisfait MLRP, alors le paiement de second rang, t_i, reçu par l'agent (aversion pour le risque ou responsabilité limitée) est croissant avec le niveau de performance, q_i. (voir Laffont et Martimort, 2002, Section 4.5.)*

References

Laffont, J.-J. et D. Martimort (2002): *The Theory of Incentives: The Principal-Agent Model*, Princeton University Press.

Milgrom, P. (1981): "Good News and Bad News: Representation Theorems and Applications," *Bell Journal of Economics*, 12, 380–391.

Peltzam, S. (1975): "The Effects of Automobile Safety Regulation," *Journal of Political Economy*, 83, 677–725.